Über das Verhalten von Potenzreihen mit zwei und drei Veränderlichen an der Konvergenzgrenze.

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der II. Sektion der hohen Philosophischen Fakultät

der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt am 6. März 1913

von

Hermann Holzberger.

Wien.

Verlag der „Monatshefte für Mathematik und Physik".

Über das Verhalten von Potenzreihen mit zwei und drei Veränderlichen an der Konvergenzgrenze.

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der II. Sektion der hohen Philosophischen Fakultät

der K. B. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

vorgelegt am 6. März 1913

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

von

Hermann Holzberger.

Wien.

Verlag der „Monatshefte für Mathematik und Physik“.

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Mai 1913.

K. und K. Hofbuchdruckerei Karl Prochaska in Teschen.

Einleitung.

Das Verhalten der Potenzreihen einer Variabeln auf dem Rande des Konvergenzkreises ist in den letzten Jahrzehnten eingehend untersucht worden. Im Gegensatz hiezu weiß man über das Verhalten mehrfacher Reihen auf dem Rande des Konvergenzbereiches noch sehr wenig. Es sind mir hierüber nur einige Arbeiten von Bromwich und Hardy bekannt.[1]) In der Arbeit „Some extensions...", pag. 164—168, geben die Autoren Erweiterungen des sogenannten Abelschen Grenzwertsatzes auf mehrfache Reihen für einen sehr wichtigen, aber freilich nur speziellen Fall:

1. Konvergiert $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ und ist $\left|\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_\mu^\nu\right| < g$ für alle m und n (die Autoren nennen diese Bedingung die der Endlichkeit), so konvergiert $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und es ist

$$\lim_{x,y=1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu .$$

2. Konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ und ist $\left|\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_\mu^\nu\right| < g$ für alle m und n, so konvergiert $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$

[1]) Hardy, On the convergence of certain multiple series. Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 1, 1903/4. — Bromwich and Hardy, Some extensions to multiple series of Abels theorem on the continuity of power series. Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 2, 1904. — Bromwich, Various extensions of Abels lemma. Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 6, 1908.

und es ist

$$\lim_{y=1}\lim_{x=1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^\nu .$$

Diese beiden Sätze erfahren in der zitierten Abhandlung noch weitere Verallgemeinerung auf n-fache Reihen. Bromwich und Hardy machen jedoch dabei immer die beiden Voraussetzungen:

a) Die vorgelegte Reihe erfüllt die Bedingung der Endlichkeit.

b) Die Variabeln durchlaufen beim Grenzübergang nur reelle Werte.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im ersten Kapitel, §§ 1—3, damit, unter Verzicht auf die Voraussetzungen *a*) und *b*), die Grenzwertgleichung des Satzes 1 in möglichster Allgemeinheit zu erhalten. Zunächst wird in § 2 für den Satz 1 unter Beibehaltung der Voraussetzung *a*) ein neuer Beweis gegeben, der auf der gleichmäßigen Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ in einem gewissen, näher zu bestimmenden Bereiche beruht und uns insoferne[1]) einen tieferen Einblick in das Verhalten der Reihe gewährt, als dies bei dem Bromwich-Hardyschen Beweise der Fall ist. Bei dem Grenzübergange sind jedoch die Variabeln in dem Einheitskreise nicht ganz willkürlich, sondern durch die Ungleichungen $\frac{|1-x|}{1-|x|} < g$, $\frac{|1-y|}{1-|y|} < g_1$ auf einen bestimmten Bereich beschränkt.

In § 3 wird zum allgemeinen Falle übergegangen, indem man auch die Bedingung *a*) streicht. Es wird gezeigt, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichung $\lim_{x,y=1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ darin besteht, daß alle Zeilen und Kolonnen der Doppelreihe in der Umgebung des Punktes $x=1$, $y=1$ unter endlicher Grenze bleiben, soferne man schon weiß, daß die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergiert. Diese letztere Frage ist aber schon von Herrn Hartogs beantwortet worden, so daß wir uns nicht mehr mit ihr beschäftigen müssen. Auch für den Fall, daß $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ nicht den ganzen Bereich $|x|<1$, $|y|<1$ zum Konvergenzgebiet hat, werden unter Zuhilfenahme Hartogsscher Sätze noch hinreichende Bedingungen für die Grenzwertgleichung gefunden. Endlich wird gezeigt, daß in dem

[1]) Vgl. Pringsheim, Münch. Ber. 27 (1897), p. 344.

allgemeinen Falle, in dem eine gewisse Anzahl von Zeilen und Kolonnen in der Umgebung des Punktes $x=1$, $y=1$ über alle Grenzen wächst, die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ in der Umgebung dieses Punktes nicht unter endlicher Grenze bleibt, daß sie aber durch Addition eines aus den nicht endlich bleibenden Zeilen und Kolonnen gebildeten Ausdrucks in eine Reihe übergeht, die $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ zum Grenzwert hat, ein Ergebnis, welches dann als „allgemeiner Abelscher Grenzwertsatz“ bezeichnet wird.

Die folgenden Paragraphen (4 und 5) bringen sodann die Erweiterung der Ergebnisse auf den Fall, daß $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ nicht konvergiert, wohl aber ein arithmetisches Mittel besitzt. Bekanntlich hat Hölder zuerst eine Definition des arithmetischen Mittels höherer Ordnung einer unendlichen Reihe gegeben und bewiesen, daß $\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s$, wenn s das arithmetische Mittel der Reihe ist, welchen Satz Bromwich und Hardy auf n-fache Reihen übertragen haben. Eine von der Hölderschen abweichende Definition des arithmetischen Mittels höherer Ordnung gab Cesàro; seine Definition, welche bekanntlich von gleicher Tragweite wie die Höldersche ist, hat vor dieser den Vorzug, leichter anwendbar zu sein und gestattet eine bedeutende Vereinfachung im Beweise des Grenzwertsatzes. Dies berechtigte uns, von der Hölderschen Definition ganz abzusehen und die Cesàrosche zu Grunde zu legen.

Um aber der vollen Allgemeinheit sicher zu sein, erwies es sich als notwendig, zunächst einen unter dem Namen „Cauchyscher Grenzwertsatz“ bekannten Hilfssatz auf Doppelreihen auszudehnen, und dann allgemein nicht nur das arithmetische Mittel erster Ordnung einer Doppelreihe, sondern auch das von beliebiger Ordnung einer genaueren Untersuchung zu unterziehen (§§ 4 und 5, 1—2). Es zeigte sich, daß bei einer Reihe, die die Bedingung der Endlichkeit nicht erfüllt, die Definition des arithmetischen Mittels mit einer gewissen Vorsicht zu geschehen hat und daß man eventuell diejenigen Partialsummen $\sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_\mu^\nu$, deren Indizes m, n zwei Zahlen M, N nicht gleichzeitig übertreffen, weglassen können muß. Ferner wird der Begriff des normalkonvergenten Mittelwertes aufgestellt, d. h. desjenigen Mittelwertes einer Reihe, dessen Näherungswerte alle unter endlicher Grenze bleiben und gezeigt, daß jede Reihe, die einen arithmetischen Mittelwert besitzt, so abgeändert werden kann, daß sie einen normalkonvergenten Mittelwert erhält.

Nunmehr wird für normalkonvergente Mittelwerte der Satz bewiesen:

Besitzt $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ einen normalkonvergenten Mittelwert s, so ist für $|x|<1$, $|y|<1$ $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ absolut konvergent und es gilt (in einem bestimmten Bereiche)

$$\lim_{x,y=1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = s,$$

von welchem Satz man dann auf Grund der ausgeführten Untersuchungen über arithmetische Mittel von Doppelreihen auf den allgemeinen Fall eines beliebigen, d. h. nicht normalkonvergenten Mittelwerts ebenso übergeht wie in § 3 von der Bedingung *a)* zum Falle einer beliebigen konvergenten Doppelreihe. Infolgedessen sind alle Ergebnisse von § 3 auf unser erweitertes Problem nahezu wörtlich übertragbar und dieses ebenfalls allgemein gelöst.

In einer Anmerkung werden schließlich noch einige Verallgemeinerungen des Satzes 2, die leicht zu beweisen sind, erwähnt; leider war es mir hier nicht möglich, die Grenzen für den Satz 2 durch Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen genau abzustecken.

Das zweite Kapitel bringt nun die Verallgemeinerung der Hauptergebnisse des ersten Kapitels auf dreifache Reihen. Während unter Beibehaltung der Bedingung *a)* die Verhältnisse sogar für n-fache Reihen durchaus ebenso liegen, wie bei Doppelreihen und die einzige Komplikation in der größeren Zahl der Variabeln liegt, treten bei der Untersuchung des allgemeinen Falles schon für $n=3$ Erscheinungen zu Tage, die von den bei Doppelreihen gefundenen durchaus verschieden sind. Es ist nämlich bei dreifachen Reihen durchaus nicht mehr notwendig für den Grenzwertsatz, daß alle in der dreifachen Reihe enthaltenen zwei- und einfachen Reihen in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ endlich bleiben; vielmehr kann eine endliche Anzahl zweifacher und sogar eine unendliche Anzahl einfacher Reihen in der Nähe dieses Punktes über alle Grenzen wachsen, ohne daß die Gleichung

$$\lim_{x_1,x_2,x_3=1} \sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} = \sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$$

beeinträchtigt wird. Doch ist dieses Unendlichwerden der zwei- und einfachen Reihen einer gewissen Beschränkung unterworfen, die mit Hilfe einer Klassifizierung zweifacher Reihen exakt ausgesprochen

werden kann. Als Resultat ergibt sich, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gleichung

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} \sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} = \sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$$

darin besteht, daß die dreifache Reihe selbst in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ unter endlicher Grenze bleibt, ein Resultat, welches ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden kann, daß die Reihe ein arithmetisches Mittel beliebiger Ordnung besitzt.

Das letzte Kapitel endlich ist der Umkehrung des Abelschen Grenzwertsatzes gewidmet. Bekanntlich hat Tauber[1]) für einfache Reihen den wichtigen Satz bewiesen:

$$\text{Ist } \lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{1.a_0 + 2.a_1 + \cdots (n+1) a_n}{n+1} = 0,$$

welche Bedingungen beide zur Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ notwendig sind, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ konvergent.

Es ist mir gelungen, diesen Satz auf Doppelreihen auszudehnen. Dabei habe ich eine etwas allgemeinere, von Herrn Landau herrührende Form des Tauberschen Satzes zu Grunde gelegt. § 9 behandelt den einfachsten Fall, daß ($a_\mu^\nu = \alpha_\mu^\nu + i\beta_\mu^\nu$ gesetzt) alle α_μ^ν als auch alle β_μ^ν unter sich gleiches Zeichen besitzen. Der folgende Paragraph dient der Herleitung notwendiger Konvergenzbedingungen, die der Tauberschen Gleichung $\lim_{n=\infty} \frac{1.a_0 + 2.a_1 + \cdots (n+1) a_n}{n+1} = 0$ entsprechen. Im letzten Paragraph endlich wird die Übertragung des Tauber-Landauschen Satzes zuerst unter einer der Bedingung a) sehr nahe verwandten Voraussetzung ausgeführt und dann mit Hilfe der Ergebnisse von §§ 3 und 9 auf beliebige Doppelreihen ausgedehnt.

---

[1]) Monatsh. für Math. u. Physik VIII., 1897, p. 273. — Pringsheim, Münch. Ber. 30, 1900, p. 51.

Inhaltsübersicht.

Seite

I. Der Abelsche Grenzwertsatz für Doppelreihen.

§ 1. Erklärung der Bezeichnungen 9
§ 2. Gleichmäßige Konvergenz einer Doppelreihe 12
§ 3. Der Abelsche Grenzwertsatz 18
§ 4. Der Cauchy-Jensensche Grenzwertsatz 27
§ 5. Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes auf Reihen mit arithmetischem Mittel 33
Anmerkung: Der Abelsche Grenzwertsatz für die Zeilenreihe 50

II. Der Abelsche Grenzwertsatz für dreifache Reihen.

§ 6. Vorbereitende Sätze: Allgemein geltende Grenzwertgleichung. Klassifikation der Doppelreihen 54
§ 7. Notwendige und hinreichende Bedingungen für den Abelschen Grenzwertsatz 60

III. Die Umkehrung des Abelschen Grenzwertsatzes für Doppelreihen.

§ 8. Der Fall gleichbezeichneter Koeffizienten 70
§ 9. Notwendige Konvergenzbedingungen für Doppelreihen. Transformationen 71
§ 10. Der Taubersche Satz 78

I. Der Abelsche Grenzwertsatz für Doppelreihen.

§ 1.

1. Für eine übersichtliche Beweisführung erweist sich eine konsequente Bezeichnungsweise notwendig.

Wir schreiben die Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ in der Form des Schemas

$$\begin{array}{l} a_0^0 \quad + a_1^0 x + a_2^0 x^2 + \cdots \\ + a_0^1 y \; + a_1^1 x y + a_2^1 x^2 y + \cdots \\ + a_0^2 y^2 + a_1^2 x y^2 + a_2^2 x^2 y^2 + \cdots \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

[Es wird wohl zu keinen Mißverständnissen Anlaß geben, wenn wir a_μ^ν statt $a_\mu^{(\nu)}$ schreiben, da die einzigen auftretenden Potenzen die von x und y sind; diese Vereinfachung möge immer gestattet sein, wenn es sich um die oberen Indizes von Doppelfolgen handelt.]

Grenzt man in dem Schema ein Rechteck mit den Eckpunkten $m, n \quad m+p, n$ $m, n+q \quad m+p, n+q$ ab, so sei die Summe der innerhalb und auf der Begrenzung des Rechtecks gelegenen Glieder mit $r_{m,p}^{n,q}(x, y)$ bezeichnet, also

$$r_{m,p}^{n,q}(x,y) = \sum_{\pi=0}^{p} \sum_{\varkappa=0}^{q} a_{m+\pi}^{n+\varkappa} x^{m+\pi} y^{n+\varkappa}.$$

In dem besonderen Falle, daß $m = n = o$, schreiben wir:

$$r_{o,p}^{o,q}(x,y) = s_p^q(x,y).$$

Also

$$s_m^n(x,y) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu.$$

Die Zeilen und Kolonnen unseres Schemas bezeichnen wir mit $p_\nu(x)$ und $q_\mu(y)$, so daß also

$$p_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu, \qquad q_\mu(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu y^\nu.$$

Für die Partialsummen der Zeilen schreiben wir:

$$\sum_{\pi=0}^{p} a_{m+\pi}^{n} x^{m+\pi} = p_n^{m,p}(x).$$

Läßt man einen Index ins Unendliche rücken, so soll dies durch sein Wegfallen angedeutet sein: z. B.

$$\lim_{p,q=\infty} r_{m,p}^{n,q}(x,y) = r_m^n(x,y),$$

$$\lim_{p=\infty} p_n^{m,p}(x) = p_n^m(x) \text{ (während die Summe der } m+1 \text{ ersten Glieder}$$

der n-ten Zeile $p_n^{\circ,m}(x)$ heißt)

$$\lim_{m,n=\infty} s_m^n(x,y) = s(x,y).^1)$$

Ebenso soll für das Wertepaar $x=1,\ y=1$ das Argument in Wegfall treten:

$$r_{m,p}^{n,q}(1,1) = r_{m,p}^{n,q}$$

$$s_m^n(1,1) = s_m^n;\ s(1,1) = s.$$

2. Die eben erläuterte Bezeichnung ermöglicht es uns z. B. die von Herrn Hardy für Doppelreihen gegebene Erweiterung der bekannten Abelschen Transformation auf Potenzreihen zweier Veränderlichen in übersichtlicher Weise anzuwenden. Setzt man nämlich

$$c_p^q = \Delta,$$

$$c_{\pi+1}^q - c_\pi^q = \Delta_\pi,\ c_p^{\varkappa+1} - c_p^\varkappa = \Delta^\varkappa,$$

$$c_{\pi+1}^{\varkappa+1} - c_\pi^{\varkappa+1} - c_{\pi+1}^\varkappa + c_\pi^\varkappa = \Delta_\pi^\varkappa,$$

so besteht die Identität: [2])

$$\sum_{\pi=0}^{p}\sum_{\varkappa=0}^{q} c_\pi^\varkappa u_\pi^\varkappa = \sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\varkappa=0}^{q-1}\Delta_\pi^\varkappa \sum_{\lambda=0}^{\pi}\sum_{\varrho=0}^{\varkappa} u_\lambda^\varrho - \sum_{\pi=0}^{p-1}\Delta_\pi \sum_{\lambda=0}^{\pi}\sum_{\varrho=0}^{q} u_\lambda^\varrho - \cdots$$

$$- \sum_{\varkappa=0}^{q-1}\Delta^\varkappa \sum_{\lambda=0}^{p}\sum_{\varrho=0}^{\varkappa} u_\lambda^\varrho + \Delta \sum_{\lambda=0}^{p}\sum_{\varrho=0}^{q} u_\lambda^\varrho.$$

---

[1]) Das Zeichen $\lim_{m,n=\infty}$ soll ebenso wie $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}$ und $\lim_{x,y=1}$ immer einen Doppellimes im Pringsheimschen Sinne bedeuten, während der iterierte Grenzwert mit $\lim_{m=\infty}\lim_{n=\infty}$, $\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}$, $\lim_{x=1}\lim_{y=1}$ bezeichnet wird. Auch sollen alle Grenzwerte, deren Existenz wir voraussetzen, endlich sein, sofern nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist.

[2]) Hardy, On the convergence of certain multiple series. Proceed. Lond. Math. Soc. (2) 1, 1903/4, p. 124—125.

Setzt man hier:

$$u_\pi^\varkappa = a_{m+\pi}^{n+\varkappa}$$

$$c_\pi^\varkappa = x^{m+\pi} y^{n+\varkappa}$$

so erhält man die Transformation:

$$r_{m,p}^{n,q}(x,y) = x^m y^n \Big| (1-x)(1-y) \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,\pi}^{n,\varkappa} x^\pi y^\varkappa +$$

$$+ (1-x) y^q \sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{n,q} x^\pi + (1-y) x^p \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,p}^{n,\varkappa} y^\varkappa + r_{m,p}^{n,q} x^p y^q \Big|.$$

Wir werden von dieser Transformation im nächsten Paragraph Gebrauch zu machen haben.

3. Um auch für die auftretenden x, y-Mannigfaltigkeiten eine konsequente Bezeichnung zu besitzen, verstehen wir mit Herrn Hartogs [1]) unter einem Bereich B der x-Ebene eine abgeschlossene Punktmenge von der Beschaffenheit, daß

a) jeder Punkt von B entweder ein innerer Punkt von B oder wenigstens Häufungspunkt innerer Punkte ist (ein Punkt x heißt innerer Punkt von B, wenn alle Punkte eines genügend kleinen Kreises um x ebenfalls zu B gehören);

b) je zwei innere Punkte von B sich durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke bestehende Linie verbinden lassen, deren Punkte auch alle innere Punkte von B sind.

Die Gesamtheit aller Punkte (x, y), deren x-Koordinate dem Bereich B, und deren y-Koordinate dem Bereich B_1 angehört, bezeichnen wir mit (B, B_1).

Ferner verstehen wir unter einem Bereich $\mathfrak{B}$ eine abgeschlossene vierdimensionale Punktmenge von folgender Beschaffenheit:

a) Jeder Punkt (x, y) derselben sei innerer Punkt der Menge oder Häufungspunkt innerer Punkte (wir nennen einen Punkt (x, y) einen inneren Punkt der Menge, wenn alle Punkte (x', y') eines passend gewählten Gebietes $|x' - x| < \rho, |y' - y| < \rho'$ ebenfalls zu $\mathfrak{B}$ gehören).

b) Je zwei innere Punkte von $\mathfrak{B}$ sollen durch eine aus einer endlichen Anzahl geradliniger Stücke (darstellbar durch je ein Gleichungspaar $x = \alpha t + \beta$, $y = \alpha' t + \beta'$, wobei t die sämtlichen Werte eines reellen Intervalls durchläuft) zusammengesetzte Linie miteinander verbunden werden können, welche ganz in $\mathfrak{B}$ verläuft.[2])

Wir werden endlich im folgenden einen besonderen Bereich (B, B_1) sehr häufig zu verwenden haben und demgemäß eigens

[1]) Beiträge zur elementaren Theorie der Potenzreihen zweier Veränderlichen. Dissertation, München 1904, p. 3.

[2]) Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen. Habilitationsschrift, München 1905, p. 8, Fußnote.

benennen. Die Gesamtheit derjenigen Punkte, die gleichzeitig den beiden Ungleichungen genügen

$$|x| \leq 1, \quad \frac{|1-x|}{1-|x|} \leq g \quad (g \geq 1)$$

wollen wir mit A bezeichnen. Dieser Bereich ist in den Arbeiten über Potenzreihen einer Veränderlichen auf dem Konvergenzkreis bereits eingehend untersucht worden. Herr Pringsheim hat gezeigt, daß jedes Dreieck mit den Eckpunkten $1, x_1, x_2$ ($|x_1| < 1, |x_2| < 1$) dem Bereiche bei hinlänglich großem g angehört. Es ist übrigens leicht zu erkennen, daß der vollständige Bereich von dem Inneren und der Begrenzung der Schleife einer Kreiskonchoide mit der Gleichung

$$r = \frac{2g^2 \cos\varphi - 2g}{g^2 - 1} \qquad (1 - x = re^{i\varphi})$$

gebildet wird.[1])

Entsprechend definieren wir den Bereich A_1.

Beschränken wir x und y auf reelle Werte zwischen 0 und 1 (dies kann als Ausartung von A bezw. A_1 für $g = 1$ bezw. $g_1 = 1$ angesehen werden), so schreiben wir ρ statt x, ρ_1 statt y.

§ 2.

1. Bekanntlich hat man bei Potenzreihen einer Veränderlichen zwei Möglichkeiten für den Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes. Entweder man geht nach dem Vorgange von Dirichlet[2]) von der Transformation aus:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = (1-x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda x^\nu$$

und beweist aus dieser, daß $\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, falls diese Reihe konvergiert. Oder, man zeigt nach Abel,[3]) daß die Reihe für $-1 < r \leq x \leq 1$ gleichmäßig konvergiert. Stolz[4]) hat gezeigt, daß die Reihe sogar im Bereich A gleichmäßig konvergiert, woraus dann für beliebiges x dieses Bereiches die Relation folgt: $\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$. Wie Herr Pringsheim[5]) hervorgehoben hat,

[1]) Bromwich, Varions extensions... p. 64. Vgl. auch Stolz-Gmeiner, Einleitung in die Funktionentheorie, p. 287.

[2]) Journ. de Math. (2) 7 (1862), p. 253; Werke, Berlin 1897, p. 305.

[3]) J. für Math. 1 (1826), p. 314; Oeuvres, éd. Sylow et S. Lie 1, p. 223.

[4]) Stolz und Gmeiner, Funktionentheorie p. 287.

[5]) Münch. Ber. 27 (1897), p. 344.

ist die zweite Methode die prägnantere und für das Verständnis des Satzes wichtigere. — Genau dieselben Wege bieten sich uns bei Doppelreihen dar. Mit Hilfe der Dirichletschen Methode haben die Herren Bromwich und Hardy den in der Einleitung schon erwähnten Satz bewiesen:

„Konvergiert s_m^n gegen s und ist $|s_m^n| < G$ für alle m und n, so konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x| < 1$, $|y| < 1$ und es ist $\lim_{\varrho, \varrho_1 = 1} s(\varrho, \varrho_1) = s$."

Es zeigt sich nun, daß ebenso wie bei einfachen Reihen der Grenzwertsatz einer Erweiterung insoferne fähig ist, als x, y durchaus nicht reell sein brauchen, sondern nur auf den Bereich (A, A_1) beschränkt sein müssen. Da man hiezu den von Bromwich und Hardy gegebenen Beweis nur ganz wenig zu modifizieren hat, so soll uns die Dirichletsche Methode nicht weiter beschäftigen. Dagegen soll hier gezeigt werden, daß auch bei Doppelreihen die gleichmäßige Konvergenz in einem noch näher zu bestimmenden Bereich den inneren Grund für die Gültigkeit des Grenzwertsatzes bildet. Es besteht nämlich der Satz:

„Ist $\sum_{\mu, \nu = 0}^{\infty} a_\mu^\nu$ konvergent und $|s_m^n| < G$ für jedes m und n, ist ferner $\mathfrak{B}$ ein Teilbereich von (A, A_1), welcher den Punkt $(1, 1)$ enthält, aber außerdem keinen anderen Punkt mit der x- oder y-Koordinate 1, und im übrigen die charakteristischen Eigenschaften eines Bereiches $\mathfrak{B}$ besitzt (vgl. § 1), so ist $s(x, y)$ gleichmäßig konvergent im Bereiche $\mathfrak{B}$."

Beweis: Es sei zunächst daran erinnert, daß im Bereich (A, A_1)

$$\frac{|1 - x|}{1 - |x|} \leqq g, \quad \frac{|1 - y|}{1 - |y|} \leqq g_1$$

ist. Wegen der Konvergenz von s_m^n kann man nun ein M und ein N so angeben, daß für $\begin{matrix} m \geqq M \\ n \geqq N \end{matrix}$

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m+p} \sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}, \quad \begin{matrix} p = -1, 0, 1, 2 \ldots \\ q = -1, 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

Wählen wir $q = -1$, so erhalten wir

$$|r_{m,p}^{0,n-1}| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}, \quad \begin{matrix} p = 0, 1, 2 \ldots \\ m \geqq M, n \geqq N, \end{matrix} \tag{1a}$$

ferner

$$|r_{m,p}^{0,n+q}| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}, \quad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$$

woraus man durch Subtraktion erhält:

$$|r_{m,p}^{n,q}| < \frac{\varepsilon}{(g+1)(g_1+1)}, \quad \left.\begin{matrix} m \geqq M, & p \\ n \geqq N, & q \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots \qquad (1\,b)$$

Es ist nun

$$\sum_{\mu=0}^{m+p} \sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu =$$

$$= r_{m,p}^{n,q}(x,y) + r_{0,m-1}^{n,q}(x,y) + r_{m,p}^{0,n-1}(x,y).$$

Nach § 1, 2 ist

$$r_{m,p}^{n,q}(x,y) = x^m y^n \Big\{ (1-x)(1-y) \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,\pi}^{n,\varkappa} x^\pi y^\varkappa +$$

$$+ (1-x) y^q \sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{n,q} x^\pi + (1-y) x^p \sum_{\varkappa=0}^{q-1} r_{m,p}^{n,\varkappa} y^\varkappa + r_{m,p}^{n,q} x^p y^q \Big\}.$$

Wegen (1 *b*) ist daher

$$|r_{m,p}^{n,q}(x,y)| < \Big\{ |1-x| \cdot 1 \cdot |y| \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\varkappa=0}^{q-1} |x|^\pi |y|^\varkappa +$$

$$+ |1-x| \sum_{\pi=0}^{p-1} |x|^\pi + |1-y| \sum_{\varkappa=0}^{q-1} |y|^\varkappa + 1 \Big\} \frac{\varepsilon}{(g+1)(g_1+1)}$$

$$< \Big\{ \frac{|1-x|\,|1-y|}{(1-|x|)(1-|y|)} + \frac{|1-x|}{1-|x|} + \frac{|1-y|}{1-|y|} + 1 \Big\} \frac{\varepsilon}{(g+1)(g_1+1)}$$

Also: $$|r_{m,p}^{n,q}(x,y)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Die gleiche Transformation liefert uns

$$r_{m,p}^{0,n-1}(x,y) = x^m \Big\{ (1-x)(1-y) \sum_{\pi=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,\pi}^{0,\nu} x^\pi y^\nu +$$

$$+ (1-x) y^{n-1} \sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{0,n-1} x^\pi + (1-y) x^p \sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,p}^{0,\nu} y^\nu + r_{m,p}^{0,n-1} x^p y^{n-1} \Big\}.$$

Da nun infolge von $|s_m^n| < G$

$$|r_{m,\pi}^{0,\nu}| < 2\,G,$$

so ist

$$\left|(1-x)(1-y)\sum_{\pi=0}^{p-1}\sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,\pi}^{0,\nu}\, x^{\pi} y^{\nu}\right| < \frac{|1-x|}{1-|x|}\,|1-y|\,2nG$$
$$< 2Ggn\,|1-y|$$

und

$$\left|(1-y)\,x^{p}\sum_{\nu=0}^{n-2} r_{m,p}^{0,\nu}\, y^{\nu}\right| < 2nG\,|1-y|.$$

Vermöge $(1a)$ ist ferner

$$\left|(1-x)\,y^{n-1}\sum_{\pi=0}^{p-1} r_{m,\pi}^{0,n-1}\, x^{\pi}\right| < \frac{|1-x|}{1-|x|}\,\frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}$$
$$< \frac{\varepsilon g}{2(g+1)(g_1+1)}$$

und

$$|r_{m,p}^{0,n-1} x^{p}| < \frac{\varepsilon}{2(g+1)(g_1+1)}.$$

Alle diese Ungleichungen bestehen für jedes $m \geqq M$, $n \geqq N$. Man fixiere nun m und n, indem man etwa $m = M$, $n = N$ wählt. Beschränkt man y auf diejenige Umgebung des Punktes 1, für die[1])

$$|y-1| \leqq \frac{\varepsilon}{4GN(1+g)}, \tag{3b}$$

so wird

$$|r_{M,p}^{0,N-1}(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon(g+1)}{2(g+1)(g_1+1)} < \varepsilon. \tag{4b}$$

Entsprechend findet man

$$|r_{0,M-1}^{N,q}(x,y)| < \varepsilon, \tag{4a}$$

wenn

$$|x-1| \leqq \frac{\varepsilon}{4GM(1+g_1)}. \tag{3a}$$

Für denjenigen Teil $\mathfrak{B}_1$ des Bereiches $\mathfrak{B}$, für den die Ungleichungen $(3a)$ und $(3b)$ erfüllt sind, gilt also durch Addition von (2), $(4a)$ und $(4b)$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{M+p}\sum_{\nu=0}^{N+q} a_{\mu}^{\nu} x^{\mu} y^{\nu} - \sum_{\mu=0}^{M-1}\sum_{\nu=0}^{N-1} a_{\mu}^{\nu} x^{\mu} y^{\nu}\right| < 3\varepsilon, \quad \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \Big\} = 0, 1, 2 \ldots$$

[1]) Dabei soll natürlich y außerdem noch dem Bereich A_1 angehören.

woraus sofort folgt:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m+p}\sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu\right| < 6\varepsilon \tag{5}$$

$$\text{für } \begin{matrix} m \geqq M+1 \\ n \geqq N+1 \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = -1, 0, 1, 2 \ldots$$

Derjenige Teil von $\mathfrak{B}$, der den Ungleichungen $(3a)$ und $(3b)$ nicht genügt, sei unter Einschluß seiner Begrenzung mit $\mathfrak{B}_2$ bezeichnet. Da nun der Punkt $(1, 1)$ der einzige auf dem Rande des „Kreisgebietes" $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ gelegene Punkt ist, der dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehört und dieser Punkt außerhalb $\mathfrak{B}_2$ liegt, da ferner $\mathfrak{B}_2$ eine abgeschlossene Punktmenge ist, so lassen sich zwei Zahlen $r < 1$, $r_1 < 1$ angeben, so daß der ganze Bereich $\mathfrak{B}_2$ in dem Kreisgebiet $|x| \leqq r$, $|y| \leqq r_1$ enthalten ist. In diesem Kreisgebiet ist aber die Reihe $s(x, y)$ absolut konvergent, weshalb sich zwei Zahlen M_1 und N_1 finden lassen, so daß für alle Punkte von $\mathfrak{B}_2$

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m+p}\sum_{\nu=0}^{n+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu\right| < 6\varepsilon, \tag{6}$$

wenn nur $m \geqq M_1$, $n \geqq N_1$, $\left.\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = -1, 0, 1, 2 \ldots$

Ist $M_2 \geqq \begin{cases} M_1 \\ M+1 \end{cases}$, $N_2 \geqq \begin{cases} N_1 \\ N+1 \end{cases}$, so besteht für alle Punkte des Bereiches $\mathfrak{B}$ die Ungleichung [vermöge (5) und (6)]:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{M_2+p}\sum_{\nu=0}^{N_2+q} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - \sum_{\mu=0}^{M_2-1}\sum_{\nu=0}^{N_2-1} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu\right| < 6\varepsilon \text{ w. z. b. w.}$$

2. Wir haben nun noch zu zeigen, daß die gleichmäßige Konvergenz der Reihe im Bereiche $\mathfrak{B}$ uns die Beziehung $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ im Bereich (A, A_1) verbürgt.[1])

[1]) Es dürfte erwähnenswert sein, daß man unter geeigneten Voraussetzungen auch die gleichmäßige Konvergenz von $s(x, y)$ im Bereiche (A, A_1) nachweisen kann. Es ist nämlich leicht mit Hilfe der Abelschen Transformation und des Cauchyschen Grenzwertsatzes den Satz zu beweisen:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz von $s(x, y)$ im Bereiche (A, A_1) besteht in der Konvergenz von $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ und von sämtlichen Zeilen und Kolonnen."

Man erkennt sofort, daß gleichmäßige Konvergenz in diesem Umfange uns nicht nur die Gleichung $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ liefert, sondern auch die Relationen:

$\lim_{y=1}\lim_{x=1} s(x, y) = s$ und $\lim_{x=1}\lim_{y=1} s(x, y) = s$.

Es sei $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3 \ldots \mathfrak{B}_\nu \ldots$ eine Folge von Bereichen von der Eigenschaft, daß jeder alle vorhergehende Bereiche enthält und daß sich zu jedem inneren Punkte (x, y) von (A, A_1), der gleichzeitig dem Kreisgebiete $|1-x| \leqq \delta$, $|1-y| \leqq \delta_1$ angehört, ein n finden läßt, so daß der Punkt (x, y) im Inneren aller Bereiche $\mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_{n+1} \ldots$ liegt (δ und δ_1 sind dabei zwei beliebig kleine, aber feste Zahlen). Zu jedem Bereich $\mathfrak{B}_\nu$ gehört nach dem Vorhergehenden ein Kreisgebiet $|1-x| \leqq \sigma_\nu$, $|1-y| \leqq \sigma_\nu$, so daß für alle Punkte von $\mathfrak{B}_\nu$ innerhalb und auf der Begrenzung dieses Kreisgebietes die Differenz $|s - s(x, y)| \leqq \varepsilon$ wird. Ist $\overline{\sigma_\nu}$ die obere Grenze dieser σ_ν, so behält wegen der Stetigkeit von $s(x\,y)$ diese Ungleichung auch noch für das Kreisgebiet $|1-x| \leqq \overline{\sigma_\nu}$, $|1-y| \leqq \overline{\sigma_\nu}$ ihre Richtigkeit. Die untere Grenze $\overline{\sigma}$ der $\overline{\sigma_\nu}$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) muß nun größer als Null sein. Denn wäre $\overline{\sigma} = 0$, so könnte man eine nach 0 konvergierende Folge $\overline{\sigma_{n_\lambda}}$ herausheben, so daß $\overline{\sigma_{n_\lambda}} < \overline{\sigma_{n_{\lambda-1}}}$. Es würde dann in dem Teil von $\mathfrak{B}_{n_\lambda}$, der dem Gebiet $\overline{\sigma_{n_\lambda}} \leqq \begin{Bmatrix} |x-1| \\ |y-1| \end{Bmatrix} \leqq \overline{\sigma_{n_\lambda - 1}}$ angehört, ein Punkt $(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda})$ existieren, für den $|s(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda}) - s| > \varepsilon$. Die Punkte $(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda})$ hätten den Häufungspunkt $(1, 1)$ und man könnte, da sie alle innere Punkte von (A, A_1) sind und außer $(1, 1)$ keinen Häufungspunkt mit der x- oder y-Koordinate 1 besitzen, einen Bereich $\mathfrak{B}$ konstruieren, der sie alle enthält und in dem unsere Reihe $s(x, y)$ gleichmäßig konvergent ist. Mit dieser Eigenschaft steht aber die Ungleichung $|s(x_{n_\lambda}, y_{n_\lambda}) - s| > \varepsilon$ im Widerspruch. Also ist $\overline{\sigma}$ tatsächlich von Null verschieden. Ist dann $\sigma' < \begin{cases} \overline{\sigma} \\ \delta \end{cases}$, $\sigma_1' < \begin{cases} \overline{\sigma} \\ \delta_1 \end{cases}$, so ist für alle inneren Punkte des dem Bereich (A, A_1) und dem Kreisgebiet $|1-x| \leqq \sigma'$, $|1-y| \leqq \sigma_1'$ gemeinsamen Teiles $|s(x, y) - s| \leqq \varepsilon$, also $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ im Bereiche (A, A_1).

Man könnte vermuten, daß die gleichmäßige Konvergenz von $s(\rho, \rho_1)$ für $0 \leqq \rho \leqq 1$, $0 \leqq \rho_1 \leqq 1$ weniger Voraussetzungen verlangen würde. Indessen zeigt sich, daß auch hiefür dieselben Bedingungen notwendig sind. Es läßt sich nämlich der Satz beweisen:

„Konvergiert $s(x, 1)$ für alle Punkte x' einer Menge mit dem Häufungspunkte 0, so konvergieren alle Kolonnen und daher die Doppelreihe selbst für $|x| < \rho$, wenn ρ die obere Grenze der $|x'|$ bezeichnet".

Wendet man den ersten Teil dieses Satzes und den durch Vertauschung von x mit y daraus hervorgehenden auf $s(x, y)$ an, so ergibt sich die ausgesprochene Behauptung.

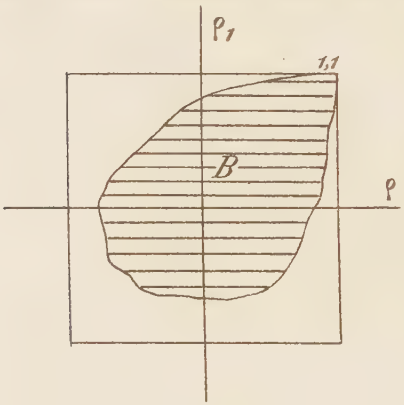
Da die Konvergenz der Zeilen und Kolonnen doch eine sehr enge Bedingung ist und die interessanten, für die Doppelreihe typischen Erscheinungen erst dann auftreten, wenn Zeilen und Kolonnen divergieren, so möge die kurze Erwähnung dieses einfachsten Falles genügen.

Wir erhalten so den Satz:

„Konvergiert s_m^n gegen s und ist $|s_m^n| < G$ für alle m und n, so konvergiert $s(x,y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und es gilt in jedem Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x,\,y=1} s(x,y) = s.“$$

Die Gleichung gilt insbesondere, wenn x und y auf beliebigen Strahlen gegen 1 konvergieren. Wählt man die reellen Axen, so geht der von Bromwich und Hardy bewiesene Satz hervor. Der Bereich der gleichmäßigen Konvergenz ist in diesem Falle jeder Teilbereich B des Quadrates $-1 \leqq \rho \leqq 1$, $-1 \leqq \rho_1 \leqq 1$, der $\rho = 1, \rho_1 = 1$ enthält, sonst aber keinen Punkt der Quadratseiten.



Der vorstehende Beweis ist freilich erheblich länger als das Dirichletsche Beweisverfahren. Doch erscheint dies gerechtfertigt, wenn man bedenkt, daß die gleichmäßige Konvergenz ja eine viel allgemeinere Eigenschaft als die Stetigkeit darstellt.

Läßt man die Bedingung $|s_m^n| < G$ fallen, so ist die Konvergenz i. a. keine gleichmäßige mehr. Beispiel: $s(x,y) = \dfrac{1-y}{(1-x)^2}$;

$$s(x,y) - s_{m-1}^{n-1}(x,y) = (1-y)\, x^m \left(\frac{m}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}\right).$$

$$\left| s\left(1-\frac{1}{m},\, 1-\frac{1}{n}\right) - s_{m-1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{m},\, 1-\frac{1}{n}\right)\right| > \frac{m^2}{2n}.$$

§ 3.

1. Wir wollen jetzt die Voraussetzung $|s_m^n| < G$ streichen und den allgemeinen Fall betrachten, in dem nur die Konvergenz von s_m^n feststeht. Durch einen Satz des Herrn Hartogs ist die Frage, wann aus der Konvergenz von $s(1,1)$ diejenige von $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ folgt, bereits vollständig beantwortet. Es besteht nämlich das Theorem:[1])

„Konvergiert $s(x,y)$ (bedingt oder unbedingt) im Punkte $(1,1)$, so gibt es höchstens eine endliche Anzahl von Zeilen und Kolonnen, deren Konvergenzradius kleiner als 1 ist. Die Doppelreihe selbst konvergiert sicher in dem Kreisgebiet $|x|<\rho$, $|y|<\rho'$ absolut,

[1]) Hartogs Diss. p. 4.

wo ρ die kleinere der beiden Größen 1 und X, ρ' die kleinere der Größen 1 und Y bedeutet. (X bezw. Y ist dabei die untere Grenze der Konvergenzradien aller Zeilen bezw. Kolonnen.)“

Wir können daher von der Untersuchung des ersten Teiles des Abelschen Satzes, der Konvergenzuntersuchung, vollständig absehen und haben uns nur mit der Grenzwertrelation zu befassen. Zunächst nehmen wir an, es sei $s(x,y)$ absolut konvergent im ganzen Gebiet $|x|<1$, $|y|<1$ und $s(1,1)$ konvergiere. Es existieren dann immer zwei Zahlen m und n derart, daß

$$|s_{m+p}^{n+q}|<G, \quad \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} = -1, 0, 1, 2 \ldots$$

Wir definieren nun

$$b_\pi^\varkappa = a_{m+\pi}^{n+\varkappa} \text{ für } \pi>0,\ \varkappa>0,$$
$$b_0^\varkappa = s_m^{n+\varkappa} - s_m^{n+\varkappa-1},\ \varkappa>0,$$
$$b_\pi^0 = s_{m+\pi}^n - s_{m+\pi-1}^n,\ \pi>0,$$
$$b_0^0 = s_m^n.$$

Dann ist

$$\sum_{\pi=0}^{p}\sum_{\varkappa=0}^{q} b_\pi^\varkappa = s_{m+p}^{n+q},$$

infolgedessen

$$\sum_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa = s$$

und wegen der erfüllten Bedingung der Endlichkeit nach unserem Satze von § 2

$$\lim_{x,y=1} x^m y^n \sum_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa = s$$

im Bereiche (A, A_1). Nun besteht aber die Identität:

$$x^m y^n \sum_{\pi,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa = s(x,y) + \sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(x)(y^n - y^\nu) +$$
$$+ \sum_{\mu=0}^{m-1} q_\mu(y)(x^m - x^\mu) + \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu (x^m - x^\mu)(y^n - y^\nu).$$

Beachtet man, daß

$$\lim_{x,y=1} \sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\mu^\nu (x^m - x^\mu)(y^n - y^\nu) = 0,$$

so folgt sofort

$$\lim_{x,y=1}\left\{s(x,y)+\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)(y^n-y^\nu)+\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)(x^m-x^\mu)\right\}=s. \quad (1)$$

2. Es besteht nun der Satz:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\lim_{x,y=1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)(y^n-y^\nu)+\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)(x^m-x^\mu)\right\}=0,$$

wenn (x, y) im Teilbereiche (B, B_1) des Bereiches (A, A_1) dem Punkte $(1, 1)$ zustrebt, besteht darin, daß im Bereiche (B, B_1) die Funktionen $\begin{cases}p_\nu(x)\\ q_\mu(y)\end{cases}$ unter endlichen Grenzen bleiben. Diese Bedingung ist sogar schon notwendig, wenn die $\{\ \}$ in der dem Bereiche (B, B_1) angehörigen Umgebung des Punktes $(1, 1)$ unter endlicher Grenze bleiben soll."

Daß diese Bedingung hinreichend ist, ist evident. Um auch ihre Notwendigkeit zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß wegen

$$\left|s_{m\ 1}^{n+\varkappa}\right|<G\ \ (\varkappa=0,1,2\ldots)\ \text{und}\ \left|s_{m-\varkappa\ 1}^{n-1}\right|<G\ \ (\varkappa=0,1,2\ldots)$$

die beiden Summen

$$y^n\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)=y^n(1-x)\sum_{\mu=0}^{\infty}s_\mu^{n-1}x^\mu$$

und

$$x^m\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)=x^m(1-y)\sum_{\nu=0}^{\infty}s_{m\ \ -1}^{\nu}y^\nu$$

im Bereich (A, A_1) und daher auch im Bereiche (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben. Soll also der in unserem Satze auftretende Klammerausdruck in der Umgebung des Punktes $(1, 1)$ unter endlicher Grenze bleiben, so muß

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)\,y^\nu+\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)\,x^\mu\right|<G'$$

sein für alle (x, y) des Bereiches (B, B_1), welche den Ungleichungen $|1-x|\leqq\delta,\ |1-y|\leqq\delta_1$ genügen.

Man wähle nun in B_1 n verschiedene Punkte y_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$ aus, von denen keiner mit 1 zusammenfallen soll und für die $|y_\lambda - 1| \leqq \delta_1$ ist. Wegen der Voraussetzung der absoluten Konvergenz von $s(x, y)$ im Gebiete $|x| < 1$, $|y| < 1$ sind die Konvergenzradien aller Zeilen und Kolonnen $\geqq 1$, so daß man eine Zahl G'' angeben kann von der Eigenschaft:

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} |q_\mu(y_\lambda)| < G''.$$

Infolgedessen ist

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} y_\lambda^\nu p_\nu(x) = G_\lambda, \text{ wobei } |G_\lambda| < G' + G'', \lambda = 1, 2, \ldots n.$$

Da nun die Determinante dieses Gleichungssystems als Differenzenprodukt der y_λ nicht verschwindet, so kann man $p_\nu(x)$ ausdrücken in der Form: [1])

$$p_\nu(x) = c_1^{(\nu)} G_1 + c_2^{(\nu)} G_2 + \cdots c_n^{(\nu)} G_n,$$

wobei die $c_\varkappa^{(\nu)}$ alle unter endlicher Grenze G''' bleiben. Daher ist

$$|p_\nu(x)| < n G''' (G' + G'')$$

für alle x des Bereiches B, die der Ungleichung $|1 - x| \leqq \delta$ genügen. Damit ist unsere Behauptung für die Zeilen — entsprechend für die Kolonnen — erwiesen.[2])

Wir dürfen sonach in (1) die beiden Summen nicht unterdrücken, außer wenn alle in Betracht kommenden Zeilen und Kolonnen im Bereiche (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben. Dagegen ist offenbar

$$\lim_{x, y=1} \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' p_\nu(x)(y^n - y^\nu) = 0; \quad \lim_{x, y=1} \sum_{\mu=0}^{m-1}{}' q_\mu(y)(x^m - x^\mu) = 0,$$

wenn $\sum'$ die Summation über die in (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleibenden Zeilen bezw. Kolonnen bedeutet. Man kann ferner in (1) die Exponenten m und n durch beliebige andere ganze Zahlen m_1 und n_1 ersetzen, da ja $\left|\sum_{\nu=0}^{n-1} p_\nu(x)\right| < G$ und ebenso $\left|\sum_{\mu=0}^{m-1} q_\mu(y)\right| < G$.

[1]) Einer ähnlichen Schlußweise bedient sich Herr Hartogs. Diss. p. 21.

[2]) Eigentlich ist zunächst nur die Endlichkeit in der dem Bereich B angehörigen Umgebung des Punktes 1 bewiesen. Vermöge der absoluten Konvergenz der $p_\nu(x)$ für $|x| < 1$ folgt daraus indessen sofort die Endlichkeit im ganzen Bereich B.

So kommen wir zu dem Ergebnis:

I. „Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und konvergiert $s_m^n(1, 1)$ gegen den Wert s, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Relation

$$\lim_{x, y=1} s(x, y) = s \tag{2}$$

im Bereiche $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ [1] darin, daß in (B, B_1) die Zeilen und Kolonnen sämtlich unter endlichen Grenzen bleiben."

II. „Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und konvergiert $s_m^n(1, 1)$ gegen den Wert s, sind ferner $p_{\alpha_1}(x), p_{\alpha_2}(x) \ldots p_{\alpha_n}(x)$ diejenigen Zeilen, die im Bereiche $B \leqq A$ nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y)$, $q_{\beta_2}(y), \ldots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen, die im Bereiche $B_1 \leqq A_1$ nicht unter endlichen Grenzen bleiben (die Zahlen m und n sind endlich [2]) und entweder 0 oder $\geqq 2$) und sind m_1 und n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so besteht immer im Bereiche (B, B_1) die Beziehung

$$\lim_{x, y=1}\left\{s(x, y) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1} - y^{\alpha_\nu}) + \sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1} - x^{\beta_\mu})\right\} = s. \tag{3}$$

Die Reihe $s(x, y)$ selbst bleibt dagegen im Bereiche (B, B_1) nicht unter endlicher Grenze."

Wir wollen den Satz II, der im Falle $m = 0$, $n = 0$ und nur in diesem Falle in den ersten übergeht, den allgemeinen Abelschen Grenzwertsatz nennen. Sofern m und n von Null verschieden sind, besagt der Satz, daß $s(x, y)$ in der dem Bereiche (B, B_1) angehörigen Umgebung des Punktes (1, 1) nicht endlich bleibt, daß aber die Art des Unendlichwerdens durch das Verhalten einer endlichen Anzahl von Zeilen und Kolonnen charakterisiert wird.

Man kann die willkürlichen Exponenten n_1 und m_1 noch so wählen, daß je eine beliebige Zeile und Kolonne aus der Gleichung (3) wegfällt. Dies ist durchaus verständlich. Denn, da die Summe der n Zeilen in der Umgebung des Punktes (1) unter endlicher Grenze bleiben muß, so ist durch $n - 1$ Zeilen das Unendlichwerden der n^{ten} Zeile schon bestimmt. $n - 1$ Zeilen und $m - 1$ Kolonnen genügen also schon, um das Verhalten von $s(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (1, 1) zu charakterisieren und nur soviele brauchen

[1] Diese Ungleichung soll bedeuten: (B, B_1) ist Teilbereich von (A, A_1).

[2] Die Endlichkeit von m und n ergibt sich unmittelbar daraus, daß infolge der Konvergenz von $s(1, 1)$ die Partialsummen aller p_ν und q_μ für genügend große μ und ν unter einer festen Grenze bleiben.

auch in der Gleichung (3) auftreten. Daraus geht auch hervor, daß m und n nicht den Wert 1 haben können; sonst wäre es möglich, die Gleichung $\lim_{x,y=1} s(x,y) = s$ auszusprechen, ohne daß alle Zeilen und Kolonnen endlich blieben, im Widerspruch mit I.

Es kann vorkommen, daß sich die Gleichung (3) in einem Teilbereiche (B', B_1') von (B, B_1) auf (2) reduziert, wenn eben die in (3) auftretenden Zeilen und Kolonnen in (B', B_1') endlich bleiben. Man hat daher zu beachten, daß man aus der Konvergenz von $s(1,1)$ und der Gültigkeit von (2) für einen Bereich (B', B_1') nicht die gleiche Relation für einen beliebigen anderen Bereich $(B, B_1) > (B', B_1')$ [aber $< (A, A_1)$] schließen darf.

Bleibt $s(x,y)$ — die Konvergenz von $s(1,1)$ vorausgesetzt — in einem Bereiche (B, B_1) unter endlicher Grenze, so folgt daraus schon die Gleichung (2). Es gibt also bei konvergentem $s(1,1)$ nur die zwei Möglichkeiten:

a) $\lim_{x,y=1} s(x,y) = s$,

b) $|s(x,y)|$ hat die obere Unbestimmtheitsgrenze ∞.

Umgekehrt: Ist $\lim_{x,y=1} s(x,y)$ vorhanden und gleich s und bleiben nicht alle Kolonnen und Zeilen unter endlichen Grenzen, so kann $s(1,1)$ nicht konvergieren und — wie man leicht sieht — auch nicht endlich oszillieren.

Die Gleichung (2) ist also nicht allein keine notwendige Bedingung für die Konvergenz von $s(1,1)$ (wie bei Potenzreihen einer Veränderlichen), sondern sie kann unter Umständen sogar dazu dienen, die Divergenz von $s(1,1)$ nachzuweisen. Dagegen bildet Satz II eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von $s(1,1)$ und ist, wie das dritte Kapitel zeigen wird, in gewissem Sinne umkehrbar. Diese Analogie zum Abelschen Satze bei Potenzreihen einer Veränderlichen gibt uns eben die Berechtigung, Satz II den allgemeinen Abelschen Satz zu nennen.

3. Es möge das Vorhergehende durch einige Beispiele erläutert werden.

1. $$a_\mu^\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\binom{\nu-p}{\mu}, \qquad \begin{matrix}\mu = 0,1,2\ldots \\ \nu = 1,2,3\ldots\end{matrix} \qquad 0! = 1$$

$$a_\mu^0 = \binom{1-p}{\mu-1} - \frac{1}{2}\binom{3-p}{\mu}, \qquad a_{0^3}^0 = -\frac{1}{2}, \qquad 3 \leqq p < 4.$$

$s(1,1)$ ist konvergent und hat den Wert

$$s = \frac{1}{2^{p-1}}\,\frac{1-e^2}{e^2}.$$

(Dagegen sind p_0, p_1 und p_2 divergent und ihre Partialsummen bleiben nicht unter endlicher Grenze; infolgedessen versagt hier der Satz von § 2.)

Ferner ist

$$s(x, y) = \frac{1}{(1+x)^{p-1}} \left(y e^{-y(1+x)} - \frac{1+x^2}{2} \right).$$

Zeilen und Kolonnen bleiben innerhalb (A, A_1) unter endlichen Grenzen, daher muß in (A, A_1)

$$\lim_{x, y = 1} s(x, y) = \frac{1}{2^{p-1}} \frac{1 - e^2}{e^2}$$

sein, was man in der Tat sofort erkennt.

2. Setzt man dagegen

$$a_\mu^\nu = \frac{(-1)^{\mu+\nu-1}}{(\nu-1)!} \binom{\nu - p}{\mu}; \quad \nu \geqq 1, \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots$$

$$a_\mu^0 = \left(\binom{1-p}{\mu - 1} - \frac{1}{2} \binom{3-p}{\mu} \right) (-1)^\mu$$

$$a_0^0 = -\frac{1}{2}, \qquad 3 \leqq p < 4,$$

so sind die vier ersten Zeilen eigentlich divergent, die übrigen sowie die Kolonnen alle konvergent. Man erkennt, daß $s(1, 1)$ konvergiert und den Wert 0 hat, während

$$s(x, y) = \frac{1}{(1-x)^{p-1}} \left(y e^{(x-1)y} - \frac{1+x^2}{2} \right).$$

Nach dem allgemeinen Abelschen Satze ist nun im Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x, y = 1} \left\{ s(x, y) + \sum_{\nu=0}^{3} p_\nu(x) (y^{n_1} - y^\nu) \right\} = 0$$

oder für $n_1 = 0$:

$$\lim_{x, y = 1} \left\{ s(x, y) + \frac{1}{(1-x)^{p-1}} (1-y) - \frac{1}{1!} \frac{1}{(1-x)^{p-2}} (1-y^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!} \frac{1}{(1-x)^{p-3}} (1-y^3) \right\} = 0,$$

was man leicht verifiziert, während $s(x, y)$ selbst nicht unter endlicher Grenze bleibt.

3. Sei $s(1,1)$ konvergent und $\lim\limits_{x,\,y=1} s(x,y) = s(1,1)$ im Bereiche (A, A_1). Bildet man nun $s_1(x,y) = s(x,y) + (1-y)\,e^{-\frac{1}{(1-x)^2}}$, so ist wiederum $s_1(1,1)$ konvergent und gleich $s(1,1)$. Nun ist aber $\lim\limits_{x=1} e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} = 0$,[1]) wenn $x = 1 - \varrho e^{\vartheta i}$ so gegen 1 strebt, daß $-\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{4}$ und es ist $\left| e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} \right| \leqq 1$ für $\vartheta = \pm\frac{\pi}{4}$. Beschränkt man also x auf einen Bereich B, für den $-\frac{\pi}{4} \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{4}$, so ist

$$\lim_{x,\,y=1} s_1(x,y) = s.$$

Wählt man jedoch einen Teilbereich von A, der dieser Ungleichung nicht mehr genügt, so sind wir auf den Satz II angewiesen, der uns eben liefert:

$$\lim_{x,\,y=1} \left\{ s_1(x,y) + (y-1)\,e^{-\frac{1}{(1-x)^2}} \right\} = s.$$

4. Wir wollen nun auch noch den Fall untersuchen, daß die Stelle (1, 1) eine „isolierte Stelle" bedingter Konvergenz ist, d. h. daß die Doppelreihe $s(x,y)$ für $x=1$, $y=1$ bedingt konvergiert, ohne im ganzen Gebiete $|x|<1$, $|y|<1$ absolut zu konvergieren. Nach den Untersuchungen des Herrn Hartogs[2]) sind die folgenden Fälle möglich:

1. Es ist $X<1$, $Y<1$, wobei X und Y die unteren Grenzen der Konvergenzradien aller Zeilen und Kolonnen bedeuten. Dann konvergiert die Doppelreihe für $|x|<X$, $|y|<Y$ absolut, während es nur eine endliche Anzahl von Punkten (x_0, y_0) $(|x_0|>X, |y_0|>Y)$ gibt, für welche noch bedingte Konvergenz der Reihe eintreten kann.

2. Es ist $X<1$, $Y\geqq 1$ (oder $X\geqq 1$, $Y<1$). Dann konvergiert die Reihe auch noch für $|x|<1$, $y=1$, während sie mindestens in dem Gebiete $|x|<X$, $|y|<1$ absolut konvergiert. Die Anzahl der y-Werte, für die eine solche bedingte Konvergenz eintreten kann, ist wiederum endlich.

Wir wenden uns zunächst zu Fall 1. Es ist auch hier die Relation (1) von Nr. 1 noch gültig. Der Klammerausdruck in dieser Gleichung stellt, da bis auf eine ganze rationale Funktion mit $x^m y^n \sum\limits_{\pi,\,\varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa$ identisch, eine im Kreisgebiete $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergente Doppelreihe und infolgedessen eine für jeden inneren Punkt des Bereiches $|x|\leqq 1$, $|y|\leqq 1$ reguläre analytische Funktion dar. Das gleiche gilt zufolge einer in Nr. 2 gemachten

[1]) cf. Pringsheim, Münch. Ber. 1900, p. 39.
[2]) Diss. p. 18 ff.

Bemerkung von $y^{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}p_\nu(x)+x^{m}\sum_{\mu=0}^{m-1}q_\mu(y)$. Angenommen, es gebe einen Bereich $(B, B_1)\leqq(A, A_1)$, der $(0,0)$ und $(1,1)$ enthält und in dem die Funktion $s(x,y)$ regulär ist, ausgenommen $(1,1)$ und diejenigen Punkte, deren eine Koordinate 1 ist,[1]) so sind für alle Punkte von $\begin{cases}B\\B_1\end{cases}$ außer $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ sämtliche in (1) auftretenden $\begin{cases}\text{Zeilen}\\\text{Kolonnen}\end{cases}$ regulär und umgekehrt. Es wiederholen sich nun alle Schlüsse von Nr. 2 dieses Paragraphen. Diejenigen Zeilen und Kolonnen, die in B bezw. B_1 unter endlichen Grenzen bleiben und nur diese dürfen aus (1) gestrichen werden. Wir erhalten daher den Satz:

„Ist die Stelle $(1,1)$ eine isolierte Stelle bedingter Konvergenz für die Doppelreihe $s(x,y)$ $(X<1,\ Y<1)$ und gibt es einen den Punkt $(0,0)$ und $(1,1)$ enthaltenden Bereich $(B, B_1)\leqq(A, A_1)$, innerhalb dessen die Funktion $s(x,y)$ regulär ist (mit Einschluß der Begrenzung außer $(1,1)$ und denjenigen Punkten, deren eine Koordinate 1 ist), sind ferner $p_{\alpha_1}(x)\dots p_{\alpha_n}(x)$ diejenigen Zeilen, die im Bereiche B nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y),\dots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen von entsprechender Eigenschaft, und m_1 und n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so ist im Bereiche (B, B_1)

$$\lim_{x,y=1}\left\{s(x,y)+\sum_{\nu=1}^{n}p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1}-y^{\alpha_\nu})+\sum_{\mu=1}^{m}q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1}-x^{\beta_\mu})\right\}=s.$$

Zweiter Fall: $X<1$, $Y\geqq 1$. Die Kolonnen brauchen jetzt gar nicht mehr fortgesetzt zu werden, da sie alle mindestens den Konvergenzradius 1 besitzen. Die Funktion $s(x,y)$ ist in diesem Falle dann und nur dann nach dem Punkte $(1,1)$ fortsetzbar innerhalb (A, A_1), wenn es einen 0 und 1 enthaltenden Bereich $B<A$ gibt, in dem die in (1) auftretenden Zeilen regulär sind (mit Einschluß der Begrenzung von B außer $x=1$).

Unser Satz nimmt jetzt die Form an:

„Ist die Stelle $(1,1)$ eine isolierte Stelle bedingter Konvergenz für die Doppelreihe $s(x,y)$ $(X<1,\ Y\geqq 1)$ und gibt es einen $x=0$ und $x=1$ enthaltenden Bereich $B\leqq A$, so daß im Bereich (B, A_1) die Funktion $s(x,y)$ regulär ist (mit Einschluß der Begrenzung außer $(1,1)$ und den Punkten, deren eine Koordinate 1 ist), sind

[1]) Einen solchen Bereich gibt es dann und nur dann, wenn $s(x,y)$ innerhalb (A, A_1) nach der Umgebung des Punktes $(1,1)$ fortsetzbar ist.

ferner $p_{\alpha_1}(x) \ldots p_{\alpha_n}(x)$ die Zeilen, die im Bereiche B nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y) \ldots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen, welche im Bereiche $B_1 \leqq A_1$ dasselbe Verhalten zeigen und sind m_1 und n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so ist im Bereiche (B, B_1):

$$\lim_{x,\,y=1} \left\{ s(x,y) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x)\,(y^{n_1} - y^{\alpha_\nu}) + \sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y)\,(x^{m_1} - x^{\beta_\mu}) \right\} = s.“$$

Beispiel:

$$s(x,y) = \frac{1}{(1+2x)^2}\left(y\, e^{-y(1+2x)} - \frac{1+4x^2}{2} \right).$$

Für $|x| < \frac{1}{2}$, $|y| < \infty$ konvergiert die Doppelreihe absolut, für $|x| > \frac{1}{2}$, $y = 1$ noch bedingt. Die Zeilen p_0, p_1, p_2 haben den Konvergenzradius $\frac{1}{2}$, die übrigen den Radius ∞. Indessen sind die drei ersten Zeilen $\left(\text{nämlich } -\frac{1+4x^2}{2(1+2x)^2}, \frac{1}{(1+2x)^2}, -\frac{1}{(1+2x)}\right)$ innerhalb des Bereiches A, nach dem Punkte 1 fortsetzbar und bleiben unter endlichen Grenzen. Daher ist nach unserem Satze, da alle Kolonnen endlich bleiben:

$$\lim_{x,\,y=1} s(x,y) = s(1,1) = \frac{1}{9}\left(e^{-3} - \frac{5}{2} \right).$$

§ 4.

Unsere nächste Aufgabe soll darin bestehen, den Abelschen Grenzwertsatz in analoger Weise, wie es bei Potenzreihen einer Veränderlichen von Frobenius, Hölder u. a. ausgeführt worden ist, zu erweitern. Dabei möge es gestattet sein, die sich notwendig erweisenden Hilfssätze etwas allgemeiner zu fassen, als es unsere eigentliche Aufgabe verlangen würde.

Der folgende Hilfssatz ist unter dem Namen „Cauchyscher Grenzwertsatz“ bekannt:

„Ist $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = s$, so ist auch $\lim_{\nu=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots s_\nu}{\nu+1} = s.“$

Jensen[1]) hat diesem Satz noch eine allgemeinere Form gegeben, deren Übertragung auf Doppelfolgen folgendermaßen lautet:

[1]) Comptes rendus T. 106, p. 833.

I. „Ist $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = s$ und sind m_1 und n_1 zwei Zahlen von der Eigenschaft, daß $|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}| < G$ für $\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 0, 1, 2\ldots$, ist ferner $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu^\nu$ eine Doppelreihe, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$1.\quad \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} |\alpha_\mu^\nu| \quad \text{ist divergent,}$$

$$2.\quad \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} |\alpha_\mu^\nu|}{\left|\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu\right|} < G \quad \text{für jedes } m \text{ und } n, \tag{2}$$

$$3.\quad \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n} |\alpha_{\mu_1}^\nu|}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} = 0 \quad \text{und ebenso} \quad \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m} |\alpha_\mu^{\nu_1}|}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} = 0 \tag{3}$$

für jedes μ_1 bezw. ν_1, so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\,\alpha_\mu^\nu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} = s^{\mu}. \tag{4}$$

Beweis:

$$\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu} - s =$$

$$= \frac{\left(\sum\limits_{\mu=0}^{m'}\sum\limits_{\nu=0}^{n'} + \sum\limits_{\mu=0}^{m'}\sum\limits_{\nu=n'+1}^{n} + \sum\limits_{\mu=m'+1}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n'} + \sum\limits_{\mu=m'+1}^{m}\sum\limits_{\nu=n'+1}^{n}\right)(s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu} - s)\,\alpha_\mu^\nu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m}\sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu}$$

$$= Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

wenn wir die vier Quotienten der rechten Seite der Reihe nach mit Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 bezeichnen. Wegen (2) ist nun

$$|Q_4| < \varepsilon,$$

wenn man m' und n' so bestimmt, daß für $\mu \geqq m'+1$, $\nu \geqq n'+1$

$$|s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu} - s| < \frac{\varepsilon}{G}.$$

Ferner ist

$$|Q_2| < (G+|s|)\frac{\sum_{\mu=0}^{m'}\sum_{\nu=n'+1}^{n}|\alpha_\mu^\nu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\mu^\nu\right|} < \varepsilon \text{ für } n \geqq N,$$

wenn man N so bestimmt, daß

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{n}|\alpha_{\mu_1}^\nu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\mu^\nu\right|} < \frac{\varepsilon}{(G+|s|)(m'+1)} \text{ sofern } n \geqq N,\ \mu_1 = 0, 1, 2, \ldots m'.$$

Ebenso findet man ein M, so daß für $m \geqq M$:

$$|Q_3| < \varepsilon$$

wird. Endlich kann man noch M und N so groß angeben, daß gleichzeitig für $m \geqq M$, $n \geqq N$

$$|Q_1| < \varepsilon.$$

Somit wird die linke Seite von (5) kleiner als 4ε für jedes $m \geqq M$, $n \geqq N$, w. z. b. w.

Die Bedingung (3) ist immer erfüllt, wenn alle Zeilen und Kolonnen von $\Sigma\alpha_\mu^\nu$ absolut konvergieren; z. B. $\alpha_\mu^\nu = \frac{1}{(\mu+\nu+1)^2}$.

Für unsere Anwendungen ist indessen nur der Fall $\alpha_\mu^\nu = \beta_\mu\gamma_\nu$ von Bedeutung. Unter dieser Voraussetzung reduzieren sich die Bedingungen (1), (2), (3) auf die folgenden:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}|\beta_\mu| \text{ und } \sum_{\nu=0}^{\infty}|\gamma_\nu| \text{ seien divergent,} \qquad (1')$$

$$\frac{\sum_{\mu=0}^{m} |\beta_\mu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu\right|} < G \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_\nu|}{\left|\sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu\right|} < G. \tag{2'}$$

(3') ist durch unseren Ansatz $\alpha_\mu^\nu = \beta_\mu \gamma_\nu$ von selbst erfüllt.

$\beta_\mu = 1$ und $\gamma_\nu = 1$ ergeben den Satz:

„Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = s$ und $|s_{m_1+\mu}^{m_1+\nu}| < G \binom{\mu}{\nu} = 0, 1, 2 \ldots)$, so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{m_1+\nu}}{(m+1)(n+1)} = s\text{“},$$

welcher die Erweiterung des ursprünglichen Cauchyschen Grenzwertsatzes darstellt.

Wir können in dem Falle $\alpha_\mu^\nu = \beta_\mu \gamma_\nu$ das erhaltene Resultat auch durch eine wiederholte Anwendung des folgenden Satzes erzielen, der ebenfalls eine Übertragung des Cauchy-Jensenschen Grenzwertsatzes bildet:

II. „Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = s$ und $|s_{m_1+\mu}^{\nu}| < g_\mu$ [1]) $\binom{\mu}{\nu} = 0, 1, 2 \ldots)$, ist ferner $\sum_{\mu=0}^{\infty} |\beta_\mu|$ eine divergente Reihe, für die immer $\frac{\sum_{\mu=0}^{m} |\beta_\mu|}{\left|\sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu\right|} < G$, so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^{n} \beta_\mu}{\sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu} = s\text{“}. \tag{6}$$

[1]) Die Ungleichung soll bedeuten: $|s_{m_1+\mu}^{\nu}|$ bleibt bei fixiertem μ für alle ν unter einer festen Grenze g_μ. Diese Grenze wird im allgemeinen von μ abhängig sein, was durch den Index angedeutet ist. Konvergiert s_μ^ν gegen einen endlichen Grenzwert, so ist das Ungleichungspaar $|s_{m_1+\mu}^{\nu}| < g_\mu$, $|s_\mu^{m_1+\nu}| < g_\nu$ äquivalent mit $|s_{m_1+\mu}^{m_1+\nu}| < G$.

Der Beweis dieses Satzes schließt sich so eng an den entsprechenden bei einfachen Folgen an, daß es überflüssig sein dürfte, ihn hier auszuführen.

Aus diesem Satze, den wir sehr oft anzuwenden haben, leiten wir I auf folgende Weise ab: Es sei

$$t_m^n = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^n \beta_\mu}{\sum_{\mu=0}^{m} \beta_\mu}.$$

Dann ist

$$|t_m^n| < g_m \text{ für jedes } m \text{ und } n.$$

Ist ferner für jedes μ und n

$$|s_\mu^{m_1+n}| < g_n,$$

so ist auch:

$$|t_m^{m_1+n}| < G g_n \text{ für jedes } m \text{ und } n.$$

Ist nun $\Sigma\gamma_\nu$ eine Reihe von gleicher Eigenschaft wie $\Sigma\beta_\mu$, so findet man nach II:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} t_m^{m_1+\nu}\gamma_\nu}{\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_\nu} = s \text{ oder } \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{m_1+\nu}\beta_\mu\gamma_\nu}{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\beta_\mu\gamma_\nu} = s.$$

Hinzugefügt sei noch, daß diese Folge die Eigenschaft besitzt, für alle m und n unter einer festen endlichen Grenze zu bleiben.

Da für jede konvergente Folge s_μ^ν zwei Zahlen m_1 und n_1 von der in I und II verlangten Eigenschaft existieren, so ist sowohl I als auch II für jede konvergente Doppelfolge gültig. Die Bedingung $|s_{m_1+\mu}^{m_1+\nu}| < g$ bezw. $|s_{m_1+\mu}^{\nu}| < g_\mu$ ist jedoch durchaus nicht notwendig. Es kann in speziellen Fällen z. B. eintreten, daß (4) oder (6) für $m_1 = 0$, $n_1 = 0$ besteht, ohne daß $|s_\mu^\nu| < g$ bezw. $|s_\mu^\nu| < g_\mu$ ist.

Beispiel: $s_\mu^\nu = (\nu+1)^{3-\mu}(\mu > 0)$; $s_0^\nu = -(\nu+1)^2 - (\nu+1)$;

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{s_0^n + s_1^n + \cdots s_m^n}{m+1} = \lim_{\mu,\nu=\infty} s_\mu^\nu = 0,$$ obwohl s_0^ν, s_1^ν und s_2^ν nicht unter endlichen Grenzen bleiben; definiert man dagegen $s_0^\nu = (\nu+1)^3$, so ist dieser Grenzwert nicht mehr vorhanden. In beiden Fällen

jedoch ist $\lim_{m,n=\infty} \frac{s_3^n + s_4^n + \cdots s_{m+3}^n}{m+1} = 0$. Wir wollen diese Verhältnisse noch etwas genauer studieren:

Es sei

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m'+\mu}^n}{m+1} = s,$$

aber es sei erst für $m \geqq m_1 - m' - 1 \ (m_1 > m')$

$$\frac{\left| \sum_{\mu=0}^{m} s_{m'+\mu}^n \right|}{m+1} < G_m \text{ oder, was dasselbe ist } |s_m^n| < g_m \text{ für } m \geqq m_1.$$

Dann ist

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\mu=0}^{m_1 - m' - 1} s_{m'+\mu}^n = 0.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der ersten, so folgt:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=m_1-m'}^{m} s_{m'+\mu}^n}{m+1} = s$$

oder nach leichter Umformung:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^n}{m+1} = s,$$

wobei gleichzeitig $\frac{\left| \sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^{n} \right|}{m+1} < G_m, \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots$

Wir kommen so zu dem Resultat: Ist

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m'+\mu}^n}{m+1} = s \tag{7}$$

und ist $|s_m^n| < g_m$ für $m \geqq m_1$, so ist auch

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} s_{m_1+\mu}^{n}}{m+1} = s. \tag{8}$$

Konvergiert s_μ^ν selbst gegen einen endlichen Grenzwert s' und ist der Grenzwert (7) vorhanden und gleich s, so folgt aus (8) und II, daß $s = s'$ sein muß.

Iterierte Anwendung dieses Ergebnisses liefert uns:

$$\text{Ist } \lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m'+\mu}^{n'+\nu}}{(m+1)(n+1)} = s \text{ und } |s_m^n| < g_m \text{ für } m \geqq m_1 > m' \tag{9}$$
$$|s_m^n| < g_n \text{ für } n \geqq n_1 > n'$$

so ist auch

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{(m+1)(n+1)} = s. \tag{10}$$

Konvergiert s_μ^ν und existiert der Grenzwert (9), so ist s auch der Grenzwert von s_μ^ν.

Man kann schließlich unter geeigneten Voraussetzungen analoge Sätze über die allgemeinen Quotienten $\frac{\sum\sum \alpha_\mu^\nu s_\mu^\nu}{\sum\sum \alpha_\mu^\nu}$ etc. aufstellen. Eine andere Verallgemeinerung, die für uns wichtiger ist, werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

§ 5.

Wir wenden uns nach den vorausgegangenen Betrachtungen der Untersuchung sogenannter Cesàroscher Mittelwerte zu, um schließlich die Resultate von § 3 zu verallgemeinern.

1. Die im folgenden zu betrachtenden Mittelwerte der Doppelfolge s_μ^ν sind von der Form

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\, \alpha_\mu^\nu(m,n) = s, \tag{1}$$

wobei die $\alpha_\mu^\nu(m,n)$ Elemente passend gewählter vierfach unendlicher Zahlenfolgen sind. Bleibt dann für alle m und n

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}\, \alpha_\mu^\nu(m,n) \right| < G, \tag{2}$$

so wollen wir den Mittelwert (1) einen normal konvergenten Mittelwert nennen. Existiert der Mittelwert (1), ohne normal konvergent zu sein, kann man jedoch zwei Zahlen m' und n' angeben, derart, daß

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} s_{m'+\mu}^{n'+\nu} \alpha_{\mu}^{\nu}(m,n) = s$$

normal konvergent ist, so wollen wir den Mittelwert (1) auf einen normal konvergenten Mittelwert reduzierbar nennen.

Unsere nächste Aufgabe besteht in dem Nachweis, daß die bei der Erweiterung des Abelschen Satzes zu verwendenden Mittelwerte auf normal konvergente reduzierbar sind.

2. Im Anschluß an Cesàro [1]) definieren wir das arithmetische Mittel k^{ter} Ordnung einer einfachen Zahlenfolge s_ν auf folgende Art:

Ist $S_n^{(\varkappa)} = S_0^{(\varkappa-1)} + S_1^{(\varkappa-1)} + \cdots S_n^{(\varkappa-1)}$, $S_n^{(0)} = s_n$, $\varkappa = 0,1,2 \ldots k$

und existiert $\lim_{n=\infty} k! \dfrac{S_n^{(k)}}{(n+1)^k}$, so nennen wir diesen Grenzwert das arithmetische Mittel k^{ter} Ordnung der Folge s_ν.

Wollen wir diese Definition zweckmäßig auf Doppelfolgen ausdehnen, so zeigt sich zunächst, daß wir bei der Bildung des arithmetischen Mittels beliebiger Ordnung uns die Möglichkeit offen lassen müssen, alle Glieder der Folge s_{μ}^{ν}, bei denen μ oder ν kleiner als gewisse Zahlen m' und n' sind, wegzulassen. So hat z. B. die divergente Folge $s_{\mu}^{\nu} = \left(1 + (\mu+1)^{3-\nu}\right)\left(1 + (-1)^{\nu}\right)$ kein konvergentes arithmetisches Mittel, wenn man alle Elemente der Folge berücksichtigt. Dagegen existiert $\lim_{m,n=\infty} \dfrac{1}{n+1} \sum_{\nu=3}^{n+3} s_{\mu}^{\nu} = 1$. So werden wir zur der Definition veranlaßt:

Ist

$$\left.\begin{aligned} S_{m,\varkappa}^{n,\lambda} &= S_{m,\varkappa}^{0,\lambda-1} + S_{m,\varkappa}^{1,\lambda-1} + \cdots S_{m,\varkappa}^{n,\lambda-1} \\ &= S_{0,\varkappa-1}^{n,\lambda} + S_{1,\varkappa-1}^{n,\lambda} + \cdots S_{m,\varkappa-1}^{n,\lambda} \qquad \varkappa = 0,1,2 \ldots k \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{m} S_{\mu,\varkappa-1}^{\nu,\lambda-1}, \qquad \lambda = 0,1,2 \ldots l \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei

$$S_{m,0}^{n,0} = s_{m'+m}^{n'+n}$$

zu setzen ist und existiert

$$\lim_{m,n=\infty} k!\, l!\, \frac{S_{m,k}^{n,l}}{(m+1)^k (n+1)^l}, \quad (2)$$

[1]) Sur la multiplication des séries. Bull. sc. math. (2) 14. 1890, p. 114—120.

so nennen wir diesen Grenzwert das arithmetische Mittel der Folge s_μ^ν von der Ordnung (k, l) und dem Index (m', n'). (Um den Index anzudeuten, werden wir, wenn es erforderlich ist, $S_{m,k}^{n,l}(m', n')$ schreiben statt $S_{m,k}^{n,l}$.)

Es bestehen für $S_{m,k}^{n,l}$ die Relationen — analog denen bei einfachen Folgen —

$$S_{m,k}^{n,l} = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1} S_{\mu,k}^{n,l} \quad {}_{\varkappa} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\lambda-1-\nu}{\lambda-1} S_{m,k}^{\nu,l-\lambda}$$
$$= \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1} \binom{n+\lambda-1-\nu}{\lambda-1} S_{\mu,k-\varkappa}^{\nu,l-\lambda} \tag{3}$$

also insbesondere:

$$S_{m,k}^{n,l} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+k-1-\mu}{k-1} \binom{n+l-1-\nu}{l-1} s_{m'+\mu}^{n'+\nu}. \tag{3'}$$

Definiert man $0! = 1$, so ist in unserer Festsetzung auch die Definition des arithmetischen Mittels von der Ordnung $(0, 0)$, $(k, 0)$ und $(0, l)$ enthalten. Das Mittel von der Ordnung $(0, 0)$, welches der Grenzwert der Folge selbst ist, kann — da schon in § 3 erledigt — von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Wir nehmen daher an, daß mindestens k von 0 verschieden ist.

Es sei also nunmehr

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} S_{m,k}^{n,l}(m', n') = s, \tag{4}$$

doch sei dieser Mittelwert nicht normal konvergent. Wir wollen seine Reduzierbarkeit auf einen normal konvergenten Mittelwert beweisen. Wir setzen

$$T_{m,k}^{n,l} = S_{m,k}^{n,l} \frac{l!}{(n+1)^l}. \tag{5}$$

Wegen (4) gibt es dann zwei Zahlen M und N, so daß für $m \geqq M$, $n \geqq N$

$$|T_{m,k}^{n,l}| < G(m+1)^k.$$

Dann ist auch für $m \geqq M+1$, $n \geqq N$

$$|T_{m-1,k}^{n,l}| < G(m+1)^k,$$

woraus durch Subtraktion:

$$|T^{n,l}_{m,k-1}| < 2G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+1,\ n \geqq N.$$

Also auch

$$|T^{n,l}_{m-1,k-1}| < 2G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+2,\ n \geqq N.$$

Daraus erhält man:

$$|T^{n,l}_{m,k-2}| < 4G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+2,\ n \geqq N$$

und so fortfahrend, allgemein:

$$|T^{n,l}_{m,k-\varkappa}| < 2^\varkappa G(m+1)^k \text{ für } m \geqq M+\varkappa,\ n \geqq N. \qquad (6)$$
$$\varkappa = 0,1,2,\ldots k.$$

$$< g_m \text{ für } m \geqq M+\varkappa,\ n \geqq N. \qquad (6a)$$

Ist $m_2 \geqq M+k$, so ist also

$$|T^{n,l}_{m_2+\mu,0}| < g_\mu \text{ [1]} \quad \mu = 0,1,2,\ldots$$

Es ist nun für $m \geqq m_2 \geqq M+k$

$$\frac{k!\,T^{n,l}_{m,k}}{(m+1)^k} = \frac{k!}{(m+1)^k}\left(T^{n,l}_{m_2-1,k} + \sum_{\mu=m_2}^{m} T^{n,l}_{\mu,k-1}\right)$$

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!}{(m+1)^k}\left(T^{n,}_{m_2-1,k} + \sum_{\mu=m_2}^{m} T^{n,l}_{\mu,k-1}\right) = s$$

und der absolute Betrag des linksstehenden Ausdruckes ist kleiner als g_m.

Da nun vermöge (6)

$$\left|\frac{k!}{(m+1)^k} T^{n,l}_{m_2-1,k}\right| < G\,\frac{(m_2+1)^k}{(m+1)^k}\cdot k!$$

so ist auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!}{(m+1)^k} \sum_{\mu=m_2}^{m} T^{n,l}_{\mu,k-1} = s$$

und es bleibt gleichzeitig der linksstehende Ausdruck seinem Betrage nach unter g_m. [2])

---

[1]) Wenn $M=0$, gilt übrigens, wie leicht ersichtlich, (6) für die ganze Reihe $m=0,1,2\ldots$

[2]) Selbstverständlich sind nicht alle im Laufe der Rechnung vorkommenden g_m dieselben Zahlen. Doch ist es im Interesse der Übersichtlichkeit unterblieben, die einzelnen g_m durch Indizes voneinander zu unterscheiden.

Multipliziert man diese Gleichung mit $\lim\limits_{m,\,n=\infty}\left(\frac{m+1}{m-m_2+1}\right)^k=1$ und schreibt wieder m statt $m-m_2$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{m,\,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-1}=s,\\&\left|\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-1}\right|<g_m,\quad m=0,1,2\ldots\end{aligned}\right\}\ (7_1)$$

Nunmehr sei angenommen, man habe bereits gezeigt, daß

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-\varkappa}=s\qquad(7_\varkappa)$$

und daß der absolute Betrag dieses Ausdruckes unter g_m bleibt $(m=0,1,2\ldots)$. Dann ist

$$\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-\varkappa}=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}\left(T^{n,l}_{m_2-1,\,k-\varkappa}+\sum_{i=0}^{\mu}T^{n,l}_{m_2+i,\,k-\varkappa-1}\right)$$

$$=T^{n,l}_{m_2-1,\,k-\varkappa}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-1-\mu}{\varkappa-1}+\sum_{i=0}^{m}T^{n,l}_{m_2+i,\,k-\varkappa-1}\sum_{\mu=i}^{m}\binom{m+\varkappa-\mu-1}{\varkappa-1}$$

$$=T^{n,l}_{m_2-1,\,k-\varkappa}\binom{m+\varkappa}{\varkappa}+\sum_{i=0}^{m}\binom{m+\varkappa-i}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2+i,\,k-\varkappa-1}.$$

Wegen (6) ist für $\varkappa\leqq k-1$

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\binom{m+\varkappa}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2-1,\,k-\varkappa}=0$$

und gleichzeitig die linke Seite kleiner als g_m. So erhalten wir die Gleichung:

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{k!}{(m+1)^k}\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+\varkappa-\mu}{\varkappa}T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-\varkappa-1}=s\qquad(7_{\varkappa+1})$$

und

$$\left| \frac{k!}{(m+1)^k} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+\varkappa-\mu}{\varkappa} T^{n,l}_{m_2+\mu,\,k-\varkappa-1} \right| < g_m, \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

Da die Gleichung $(7_\varkappa)$ für $\varkappa = 1$ richtig ist, so ist sie damit für alle Werte $\varkappa = 1, 2, \ldots k$ bewiesen. Ist nun bereits von vorneherein

$$\left| \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} S^{n,l}_{m,k} \right| < g_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{8}$$

so bleibt diese Eigenschaft, wie leicht aus unserem Beweisgange ersichtlich, auch für den in (7_k) auftretenden Ausdruck bestehen und der Mittelwert in (7_k), der sich auch in der Form schreiben läßt — wenn man $m_2 + m' = m_1$ setzt —

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+k-\mu-1}{k-1} \binom{n+l-\nu-1}{l-1} s^{m'+\nu}_{m_1+\mu} = s$$

ist dann bereits normal konvergent.

Ist aber die Ungleichung (8) nicht erfüllt, so unterscheiden wir zwei Fälle: *a)* $l = 0$. Wir unterdrücken dann, wenn etwa erst für $n \geqq N$ (8) erfüllt ist, alle $n < N$ und erhalten, indem wir noch $n' + N = n_1$ setzen, sofort den normal konvergenten Mittelwert

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!}{(m+1)^k} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+k-\mu-1}{k-1} s^{n_1+n}_{m_1+\mu} = s.$$

b) $l > 0$. Dann wenden wir dieselbe Überlegung, die uns zu (7_k) geführt hat, unter Vertauschung von m und n noch einmal an. Ist

$$\left| \frac{k!}{(m+1)^k} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+k-\mu-1}{k-1} T^{n,l}_{m_2+\mu,\,0} \right| < G \text{ für } n \geqq N,$$

und ist $n_1 - n' \geqq N + l$, so findet man den normal konvergenten Mittelwert

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+k-\mu-1}{k-1} \binom{n+l-\nu-1}{l-1} s^{n_1+\nu}_{m_1+\mu} = s. \tag{9}$$

Zusammenfassung: Besitzt die Folge s^ν_μ ein arithmetisches Mittel s von der Ordnung (k, l) und dem Index (m', n'), so gibt es zwei Zahlen m_0, n_0 derart, daß für jedes $m_1 \geqq m_0$, $n_1 \geqq n_0$ das Mittel von der Ordnung (k, l) und dem Index (m_1, n_1) normal konvergent ist und ebenfalls den Wert s besitzt.

Unsere Behauptung von der Reduzierbarkeit des Cesàroschen Mittelwertes ist damit bewiesen.

Will man nun eine Folge s_μ^ν daraufhin untersuchen, ob sie einen Mittelwert besitzt, so wird man am besten gleich nach einem normal konvergenten Mittelwert fragen (ein anderer braucht gar nicht zu existieren; dazu ist auch im Falle seiner Existenz der Index unbekannt). Zu diesem Zwecke hat man zu sehen, ob es zwei Zahlenpaare m_0, n_0 und k, l gibt, für welche die Relationen bestehen:

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{k!}{(m+1)^k}\displaystyle\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m+k-\mu-1}{k-1}s_\mu^{n_0+n}\right| < g_n \\ \left|\dfrac{l!}{(n+1)^l}\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+l-\nu-1}{l-1}s_{m_0+m}^{\nu}\right| < g_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} m \\ n \end{array} = 0, 1, 2 \ldots \quad (10)$$

Hat man zwei solche Zahlenpaare gefunden, so braucht man nur eine einzige Konvergenzuntersuchung auszuführen, indem man zu bestimmen sucht, ob der Mittelwert von der Ordnung (k, l) und dem Index (m_0, n_0) existiert. Ist dies nicht der Fall, so gibt es, wie man leicht zeigen kann, überhaupt keinen Mittelwert von der Ordnung (k, l) und man wird die Zahlen k, l jedenfalls größer wählen müssen. Vorteilhaft wird bei der Konvergenzuntersuchung auch die Verwendung der folgenden notwendigen Bedingung sein, die man ebenso wie bei einfachen Folgen beweist:

„Für die Existenz des $\lim_{m,n=\infty} \dfrac{k!\,l!}{(m+1)^k(n+1)^l} S_{m,k}^{n,l}$ sind notwendig die Relationen:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{S_{m,k-\varkappa}^{n,l-\lambda}}{(m+1)^k(n+1)^l} = 0,$$

wobei $\varkappa$ und λ jeden Wert von 0 bis k bezw. l annehmen können und nur nicht gleichzeitig Null sein dürfen. Im Falle $\varkappa = k$, $\lambda = l$ hat man also

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{s_m^n}{(m+1)^k(n+1)^l} = 0“.$$

Es möge schließlich das Vorhergehende durch ein Beispiel erläutert werden:

$s_\mu^\nu = \dfrac{(-1)^\mu+1}{2}\left(\left[\dfrac{\nu}{2}\right]+1\right)(-1)^\nu$ für $\mu > 5$. $\left(\left[\dfrac{\nu}{2}\right]$ = größte ganze Zahl, die $\leqq \dfrac{\nu}{2}$ ist$\right)$

$s_1^\nu = s_3^\nu = -s_5^\nu = -\left(\left[\dfrac{\nu}{2}\right]+1\right)$

$s_0^\nu = s_4^\nu = \left(\left[\dfrac{\nu}{2}\right]+1\right)\left((-1)^\nu - 1\right)$

$s_2^\nu = \left(\left[\dfrac{\nu}{2}\right]+1\right)\left((-1)^\nu + 1\right)$.

Wir wollen untersuchen, ob diese Folge einen Mittelwert besitzt. Die Bedingung (10) ist erfüllt für das Wertesystem $m_0 = 6$, $n_0 = 0$; $k = 0$, $l = 1$. Jedoch ist die notwendige Bedingung $\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s_m^n}{n+1} = 0$ nicht erfüllt. Wir müssen daher die Ordnung erhöhen. In der Tat existiert erst der Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und ist für $m_1 \geqq 6$, $n_1 \geqq 0$ normal konvergent. Außerdem ist auch der Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und dem Index (2, 0) und (4, 0) vorhanden, ist jedoch nicht normal konvergent.

Es sei noch erwähnt, daß wir für normal konvergente Mittelwerte den Satz haben: „Besitzt die Folge s_μ^ν einen normal konvergenten Mittelwert von dem Index (m, n), dem Werte s und der Ordnung (k, l), so hat sie auch einen normal konvergenten Mittelwert von gleichem Index und Werte und von der Ordnung (k', l'), wo $\left.\begin{matrix} k' \\ l' \end{matrix}\right\}$ jede beliebige ganze Zahl größer oder gleich $\left.\begin{matrix} k \\ l \end{matrix}\right\}$ ist".

Aus diesem Satze, der ebenso wie sein bekanntes Analogon für einfache Folgen eine Folgerung aus dem Cauchy-Jensenschen Grenzwertsatze ist, geht hervor, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in den folgenden Abschnitten immer $k = l$ setzen könnten.

Ebenso wie das erwähnte Theorem scheinen auch alle ähnlichen rein arithmetischen Sätze über die Mittelwerte einfacher Folgen erhalten zu bleiben, so z. B. der Satz, daß der Cesàrosche Mittelwert von der Ordnung k immer existiert, wenn der Höldersche[1]) von derselben Ordnung vorhanden ist.[2])

3. Bekanntlich besteht nun für Potenzreihen einer Veränderlichen der folgende Satz:

„Ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ und $\lim_{n=\infty} \frac{k!\, S_n^{(k)}}{(n+1)^k} = s$, so ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$ absolut konvergent und es gilt im Bereiche (A)

$$\lim_{x=1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu = s",$$

[1]) Hölder definiert den Mittelwert k^{ter} Ordnung durch die Rekursionsformel: $s_n^{(\varkappa)} = \frac{s_0^{(\varkappa-1)} + s_1^{(\varkappa-1)} + \cdots s_n^{(\varkappa-1)}}{n+1}$, $s_\nu^{(0)} = s_\nu$ $\varkappa = 1, 2, \ldots k$. (Math. Ann. 20, p. 535.)

[2]) S. Knopp, Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. Dissertation, Berlin 1907, p. 19—22.

welcher eine Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes darstellt. Um dieses Theorem auf Doppelreihen zu übertragen, schicken wir noch folgenden Hilfssatz [1]) voraus:

„Ist $\lim_{\mu,\nu=\infty} \frac{a_\mu^\nu}{(\mu+1)^p(\nu+1)^q} = a$ und $\frac{|a_\mu^\nu|}{(\mu+1)^p(\nu+1)^q} < G$

für alle μ und ν, wobei p und q beliebige reelle Zahlen größer als -1 bedeuten, so ist

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu \text{ absolut konvergent für } |x|<1, |y|<1, \quad (1)$$

$$\lim_{x,y=1} (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu = a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1) \quad (2)$$

im Bereiche $(A, A_1)^\alpha$.

Beweis: (1) folgt aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\mu+1)^p(\nu+1)^q x^\mu y^\nu$ für $|x|<1$, $|y|<1$.

Um auch (2) zu beweisen, gehen wir aus von der Identität:

$$(1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} x^\mu y^\nu = 1$$

$$\left(\binom{\mu+p}{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+p+1)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(p+1)}\right).$$

Daraus folgt

$$(1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu - a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1) =$$

$$= (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \left\{a_\mu^\nu - \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\right\} x^\mu y^\nu =$$

$$= (1-x)^{p+1}(1-y)^{q+1}\left(\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} + \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=n+1}^{\infty} + \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=m+1}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu,\nu=m+1,\,n+1}^{\infty}\right)\left(\frac{a_\mu^\nu}{\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu}} - a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\right)\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} x^\mu y^\nu.$$

---

[1]) Vergl. für einfache Reihen: Pringsheim, Münch. Ber. 1901, p. 518, für mehrfache Reihen: Bromwich und Hardy, Some extensions... p. 184—185.

Nun ist aber

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{(\mu+1)^p}{\binom{\mu+p}{\mu}} = \Gamma(p+1), \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{(\nu+1)^q}{\binom{\nu+q}{\nu}} = \Gamma(q+1);$$

daher folgt aus unseren Voraussetzungen, daß

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \left\{ \frac{a_\mu^\nu}{\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu}} - a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1) \right\} = 0$$

und daß die $\{\ \}$ ihrem absoluten Betrage nach für alle μ und ν unter einer festen Zahl G_1 bleibt.

Somit ist, wenn wir m und n so fixieren, daß für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ der absolute Betrag der $\{\ \}$ kleiner als ε wird:

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \left| \sum_{\mu,\nu=m+1,\,n+1}^{\infty} \right| <$$

$$< \varepsilon\,|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu} |x|^\mu\,|y|^\nu$$

$$= \varepsilon \left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1} \left(\frac{|1-y|}{1-|y|}\right)^{q+1}$$

$$< \varepsilon\, g^{p+1}\, g_1^{\,q+1} < \frac{\sigma}{4},$$

wenn $\varepsilon < \dfrac{\sigma}{4\,g^{p+1}\,g_1^{\,q+1}}$ gewählt wird.

Ferner:

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \left| \sum_{\mu=m+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \right| <$$

$$< G_1\,|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{\nu+q}{\nu} |y|^\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+p}{\mu} |x|^\mu$$

$$< G_1 \left(\frac{|1-x|}{1-|x|}\right)^{p+1} (n+q)^n\,|1-y|^{q+1}\,(n+1)$$

$$< G_1\, g^{p+1}\,(n+q)^n\,|1-y|^{q+1}\,(n+1) < \frac{\sigma}{4}$$

wenn

$$|1-y|<\delta_1<\left(\frac{\sigma}{4\,G_1\,q^{p+1}\,(n+q)^n\,(n+1)}\right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Ebenso findet man ein δ, so daß für $|1-x|<\delta$

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{m}\right|<\frac{\sigma}{4}.$$

Endlich ist

$$|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}\left|\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\right|<$$

$$<1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}.G_1\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{\mu+p}{\mu}\binom{\nu+q}{\nu}|x|^{\mu}|y|^{\nu}$$

$$<G_1\,(m+p)^m\,(n+q)^n\,(m+1)\,(n+1)\,|1-x|^{p+1}\,|1-y|^{q+1}$$

$$<\frac{\sigma}{4}\text{ für }|1-x|<\delta,\ |1-y|<\delta_1.$$

Also ist tatsächlich

$$\left|(1-x)^{p+1}\,(1-y)^{q+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}a_{\mu}^{\nu}\,x^{\mu}\,y^{\nu}-a\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\right|<\sigma$$

für alle (x, y) im Gebiet (A, A_1), die den Ungleichungen $|1-x|<\delta$, $|1-y|<\delta_1$ genügen.

4. Besitzen nun die Partialsummen s_{μ}^{ν} der Doppelreihe $\sum a_{\mu}^{\nu}$ einen normal konvergenten Mittelwert s von der Ordnung (k, l) und dem Index $(0,0)$, so ist nach dem eben bewiesenen Satze $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} S_{\mu,k}^{\nu,l}\,x^{\mu}\,y^{\nu}$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und es gilt im Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x,y=1}(1-x)^{k+1}\,(1-y)^{l+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}S_{\mu,k}^{\nu,l}\,x^{\mu}\,y^{\nu}=s.$$

Es ist nun leicht zu erkennen, daß

$$(1-x)^{k+1}\,(1-y)^{l+1}\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}S_{\mu,k}^{\nu,l}\,x^{\mu}\,y^{\nu}=s\,(x,y)$$

ist. Also ist $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und es gilt im Bereiche (A, A_1):

$$\lim_{x, y=1} s(x, y) = s.$$

Besitzt jetzt, allgemein, die Folge s_μ^ν einen Mittelwert s von der Ordnung (k, l) und dem Index (m', n'), so gibt es nach Nr. 2 zwei Zahlen m_0, n_0 derart, daß für jedes $m_1 \geqq m_0$, $n_1 \geqq n_0$ das Mittel vom Index (m_1, n_1) existiert und normal konvergent ist. Wir wählen $m_1 = m_0 + 1$, $n_1 = n_0 + 1$ und definieren

$$b_\pi^\varkappa = a_{m_1+\pi}^{n_1+\varkappa},\ b_0^\varkappa = s_{m_1}^{n_1+\varkappa} - s_{m_1}^{n_1+\varkappa-1},\ b_\pi^0 = s_{m_1+\pi}^{n_1} - s_{m_1+\pi-1}^{n_1},\ b_0^0 = s_{m_1}^{n_1}.$$

Dann konvergiert die Reihe $x^{m_1} y^{n_1} \sum_{\pi, \varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut und es ist

$$\lim_{x, y=1} x^{m_1} y^{n_1} \sum_{\pi, \varkappa=0}^{\infty} b_\pi^\varkappa x^\pi y^\varkappa = s.$$

Wir folgern wie in § 3, daß

$$\lim_{x, y=1} \left\{ s(x, y) + \sum_{\nu=0}^{n_0} p_\nu(x) (y^{n_0+1} - y^\nu) + \sum_{\mu=0}^{m_0} q_\mu(y) (x^{m_0+1} - x^\mu) \right\} = s \quad (1)$$

und daß dieser Klammerausdruck für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent ist. Hieraus ergibt sich: Alle Zeilen von n_0+1 (inkl.) ab, alle Kolonnen von m_0+1 ab haben mindestens den Konvergenzradius 1. Ist X die untere Grenze der Konvergenzradien der Zeilen, Y die der Kolonnen, so konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<\rho$, $|y|<\rho_1$, wenn $\begin{cases} \rho \\ \rho_1 \end{cases}$ die kleinere der Zahlen $\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$ und 1 ist.

Da die Ungleichungen (10) von Nr. 2 erfüllt sind, so beweist man leicht die Ungleichungen für den Bereich (A, A_1):

$$|p_\nu(x)|<g_\nu,\ \nu \geqq n_0+1, \qquad |q_\mu(y)|<g_\mu,\ \mu \geqq m_0+1$$

und

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n_0} p_\nu(x) \right| < G \qquad \left| \sum_{\mu=0}^{m_0} q_\mu(y) \right| < G.$$

Wir kommen so zu dem Ergebnis, daß alle Resultate und Schlüsse von § 3 auf unseren jetzigen Fall übertragen werden können. Von den Grenzwertsätzen wollen wir als wichtigsten nur den allgemeinen Abelschen Satz in erweiterter Fassung aussprechen:

„Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und besitzt die Folge s_μ^ν ein arithmetisches Mittel s von der Ordnung (k, l) und beliebigem Index, sind ferner $p_{\alpha_1}(x) \dots p_{\alpha_n}(x)$ diejenigen Zeilen, die im Bereiche $B \leqq A$ nicht unter endlichen Grenzen bleiben, $q_{\beta_1}(y) \dots q_{\beta_m}(y)$ die Kolonnen von entsprechender Eigenschaft im Bereiche $B_1 \leqq A_1$ (m und n sind endlich und entweder gleich 0 oder mindestens gleich 2) und sind m_1, n_1 zwei beliebige ganze Zahlen, so besteht immer im Bereiche $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ die Beziehung

$$\lim_{x, y = 1} \left\{ s(x, y) + \sum_{\nu=1}^{n} p_{\alpha_\nu}(x) (y^{n_1} - y^{\alpha_\nu}) + \sum_{\mu=1}^{m} q_{\beta_\mu}(y) (x^{m_1} - x^{\beta_\mu}) \right\} = s.^{1})$$

Sie geht dann und nur dann in $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ über, wenn alle Zeilen und Kolonnen in (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben.“

[1]) Wir haben den Mittelwert von der Ordnung (k, l) nur für ganzzahliges k und l definiert. Indessen ist schon von Hadamard (Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, Thèse, Paris 1892, p. 82) für einfache Folgen eine Definition des Mittelwertes mit nicht ganzzahliger Ordnung gegeben worden, die wir in folgender Weise auf Doppelfolgen übertragen können:

Ist $$S_{m, \gamma}^{n, \delta} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{m+\gamma-\mu-1}{\gamma-1} \binom{n+\delta-\nu-1}{\delta-1} s_{m'+\mu}^{n'+\nu}, \quad \text{wobei}$$

$\gamma \geqq 0$, $\delta \geqq 0$ und $\binom{m+\gamma-\mu-1}{\gamma-1} = \dfrac{\Gamma(m+\gamma-\mu)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(m-\mu+1)}$ und existiert

$$\lim_{m, n = \infty} \frac{\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(\delta+1)}{(m+1)^\gamma\,(n+1)^\delta} S_{m, \gamma}^{n, \delta} = s,$$

so nennen wir diesen Grenzwert das arithmetische Mittel der Folge s_μ^ν von der Ordnung (γ, δ) und dem Index (m', n').

Besitzt nun die Folge s_μ^ν einen normal konvergenten Mittelwert von der Ordnung (γ, δ) und dem Index $(0, 0)$, so bleibt unser Hilfssatz von Nr. 3 anwendbar und wir erhalten für diesen Fall dasselbe Resultat wie für die Ordnung (k, l). Ja, es läßt sich sogar, wenn man den im Text eingeschlagenen Beweisgang etwas abändert, der Satz beweisen:

„Konvergiert $s(x, y)$ absolut für $|x|<1$, $|y|<1$ und besitzen die s_μ^ν einen Mittelwert s von der Ordnung (γ, δ) und dem Index $(0, 0)$, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Gleichung $\lim_{x, y = 1} s(x, y) = s$ im Bereiche $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ darin, daß die sämtlichen Zeilen und Kolonnen im Bereiche (B, B_1) unter endlichen Grenzen bleiben.“

Soweit unterscheidet sich der Mittelwert von nicht ganzzahliger Ordnung nicht von dem von ganzzahliger Ordnung. Existiert aber ein nicht normal konvergenter Mittelwert vom Index $(0, 0)$ und der Ordnung (γ, δ), ohne daß alle Zeilen und Kolonnen in $(B, B_1) \leqq (A, A_1)$ unter endlichen Grenzen bleiben, so läßt sich unser allgemeiner Abelscher Satz nicht mehr aufrecht erhalten und wir müssen in diesem Falle überhaupt auf einen Grenzwertsatz verzichten. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Anzahl der Zeilen bezw. Kolonnen, die nicht unter

Über den Bereich der absoluten Konvergenz können wir aussagen:

„Besitzt die Folge s_μ^ν einen Mittelwert von irgend einer Ordnung und beliebigem Index, so gibt es höchstens eine endliche Anzahl von Zeilen und Kolonnen, deren Konvergenzradius kleiner als 1 ist. Die Doppelreihe $s(x, y)$ selbst konvergiert sicher in dem Gebiete $|x| < \rho$, $|y| < \rho_1$ absolut, wo ρ bezw. ρ_1 die kleinere der Zahlen X und 1 bezw. Y und 1 ist.“ [1])

Es sei noch ein Beispiel für unsere neue Erweiterung des Abelschen Satzes angeführt:

$$s(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)^2} + \frac{1-2x+x^2}{1-y^2}.$$

Die Reihe konvergiert absolut für $|x| < 1$, $|y| < 1$. Ferner hat, da

$$s_\mu^\nu = \frac{(-1)^\mu + 1}{2}\left(\left[\frac{\nu}{2}\right] + 1\right)(-1)^\nu \quad (\mu \geqq 2)$$

$$s_1^\nu = -\left(\left[\frac{\nu}{2}\right] + 1\right), \quad s_0^\nu = \left(\left[\frac{\nu}{2}\right] + 1\right)\left(1 + (-1)^\nu\right),$$

die Folge der s_μ^ν einen Mittelwert von der Ordnung $(1, 2)$ und dem Index $(0, 0)$. Der Wert desselben ist $s = \frac{1}{8}$. Da die drei ersten

endlicher Grenze [in (B, B_1)] bleiben, entweder 0 oder ∞ ist. Ebenso kann man nachweisen, daß ein Mittelwert von nicht ganzzahliger Ordnung, sofern er nicht bereits normal konvergent ist, nicht auf einen normal konvergenten Mittelwert reduzierbar ist, weshalb die im Text angewandte Methode bei nicht ganzzahliger Ordnung versagen muß.

Das folgende Beispiel möge diese Bemerkungen noch erläutern:

Sei $s(x, y) = (1-x)^{\gamma+1} e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}$. *) Da $e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}$ im Bereiche A_1 nicht unter endlichen Grenzen bleibt (cf. § 3, Nr. 3, Beispiel 3), so kann diese Reihe für $y = 1$ kein konvergentes oder endlich oszillierendes arithmetisches Mittel irgend einer Ordnung haben. Daher kann vermöge Gleichung (10) von Nr. 2 $s(x, y)$ für $x = 1$, $y = 1$ kein arithmetisches Mittel irgend einer ganzzahligen Ordnung besitzen. Dagegen existiert das Mittel von der Ordnung $(\gamma, 0)$ und dem Index $(0, 0)$. Es ist nämlich $s(x, y) = (1-x)^{\gamma+1}(1-y)\sum S_{\mu,\gamma}^{\nu,0} x^\mu y^\nu$, also ist $\sum S_{\mu,\gamma}^{\nu,0} x^\mu y^\nu = \frac{e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}}{1-y}$ und daraus $S_{\mu,\gamma}^{\nu,0} = 0$ für $\mu > 0$, $\lim_{\mu,\nu=\infty} \frac{S_{\mu,\gamma}^{\nu,0}}{(\mu+1)^\gamma} I(\gamma+1) = 0$; nach § 3, Nr. 3, Beispiel 3, gibt es einen Bereich $B_1 < A_1$, in dem $e^{-\frac{1}{(1-y)^2}}$ endlich bleibt; somit besteht in (A, B_1) die Gleichung: $\lim_{x,\,y=1} s(x, y) = s = 0$, während im ganzen Bereiche (A, A_1) überhaupt kein Grenzwertsatz aufrecht zu erhalten ist, da alle Kolonnen unendlich werden.

[1]) Erweiterung eines von Herrn Hartogs, Diss. p. 4, gegebenen Satzes, die man auch leicht direkt ableiten kann.

*) $\gamma > 0$, aber nicht ganzzahlig.

Kolonnen im Bereiche A_1 nicht unter endlicher Grenze bleiben, so besagt unser allgemeiner Satz:

$$\lim_{x,y=1}\left\{s(x,y)+(x^{m_1}-1)\left(\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{1-y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+(x^{m_1}-x)\left(-\frac{1}{(1+y)^2}-\frac{2}{1-y^2}\right)+(x^{m_1}-x^2)\left(\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{1-y^2}\right)\right\}=\frac{1}{8}$$

oder

$$\lim_{x,y=1}\left\{\frac{1}{(1+x)(1+y)^2}+\frac{x^{m_1}-1+x-x^2}{(1+y)^2}\right\}=\frac{1}{8}.$$

Setzt man dagegen $x=e^{\varphi i}$, $y=e^{\psi i}$ und sind φ und ψ von 0 und π verschieden, so hat $s(x,y)$ für $x=e^{\varphi i}$, $y=e^{\psi i}$ ebenfalls noch einen Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und dem Index (0, 0). Man findet

$$\lim_{\substack{x=e^{\varphi i}\\ y=e^{\psi i}}} s(x,y)=\frac{1}{(1+e^{\varphi i})(1+e^{\psi i})^2}+\frac{1-2e^{\varphi i}+e^{2\varphi i}}{1-e^{2\psi i}},$$

da jetzt alle Zeilen und Kolonnen endlich bleiben.

5. Unsere neue Erweiterung des Abelschen Grenzwertsatzes gilt natürlich in der in § 3 angegebenen Weise auch für solche Konvergenzstellen des Cesàroschen Mittelwertes, welche außerhalb des Bereiches der absoluten Konvergenz von $s(x,y)$ liegen; es wird wohl nicht nötig sein, den dort gegebenen Satz eigens für den jetzigen Fall auszusprechen. Dagegen soll die hiehergehörige Erweiterung zweier Hartogsscher Sätze angegeben werden.

Herr Hartogs hat den folgenden Satz bewiesen: [1])

$s(x,y)$ kann, sobald $|x|>X$ ist, höchstens für τ (feste) Werte von y noch konvergieren. Gibt es Zeilen, und zwar in nur endlicher Anzahl, welche X zum Konvergenzradius besitzen, so ist τ gleich der Differenz der Stellenzeiger ν der ersten und der letzten unter denselben; gibt es jedoch keine oder unendlich viele solcher Zeilen, so ist $\tau=0$.

Die Erweiterung lautet:

„$s(x,y)$ kann, sobald $|x|>X$ ist, höchstens für τ (feste) Werte von y noch Cesàrosche Mittelwerte, gleichviel welcher Ordnung, besitzen“. [2])

Der Beweis ist fast wörtlich derselbe wie bei Herrn Hartogs, so daß er übergangen werden darf. Ferner bleibt die von Herrn Hartogs gegebene Zusammenstellung der möglichen Fälle (a. a. O., p. 21 u. 22) wörtlich gültig, wenn man nur das Wort „Konvergenz“

[1]) Diss. § 7, p. 21.

[2]) Der übrige Teil des Satzes bleibt ungeändert auch für die weitere Fassung gültig. — Unter den τ y-Werten sind auch diejenigen inbegriffen, für die $s(x,y)$ möglicherweise konvergiert.

entsprechend abändert. — Als Beispiel sei das l. c. p. 22 gegebene mit einer kleinen Modifikation hier angeführt:

$$s(x,y)=\frac{y^2-y^5}{1-2x}+\frac{1}{1+y}$$

$X=\frac{1}{2}\cdot Y=1$. Für $x=1$ $\left(\text{sogar jedes } |x|>\frac{1}{2}\right)$ und $y=\sqrt[3]{1}$ hat die Reihe noch einen Mittelwert von der Ordnung $(0,1)$. Es ist nämlich, wenn $y^3=1$ ist, für $n\geqq 5$

$$s_m^n(1,y)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu y^\nu=\sum_{\nu=0}^{n}e^{\frac{2k+3}{3}\nu\pi i}\quad(k=0,1,2);$$

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{\sum_{\nu=5}^{5+n}s_m^\nu}{n+1}=\frac{1}{1+e^{\frac{2k\pi i}{3}}}.$$

Die fünfte und zweite Zeile hat den Konvergenzradius $X=\frac{1}{2}$. Tatsächlich ist hier die Anzahl der y-Werte, für die ein Mittelwert existiert, gleich τ, d. h. gleich 3.

Der zweite Satz des Herrn Hartogs lautet:

„Konvergieren für $y=1$ sämtliche Kolonnen (bedingt oder unbedingt) und konvergiert die Doppelreihe $s(x,1)$ für $x=1$, so konvergiert sie auch für $|x|<1$".

Wir verallgemeinern:

„Besitzen sämtliche Kolonnen einen Mittelwert von der Ordnung l und besitzt s_μ^ν einen normal konvergenten Mittelwert von der Ordnung (k,l) und dem Index $(0,n_0)$ $(m_0=0$ ist eine Folge der ersten Voraussetzung), so besitzt $s(x,y)$ für $|x|<1$, $y=1$ einen normal konvergenten Mittelwert von der Ordnung $(0,l)$ und dem Index $(0,n_0)$".

Beweis: Setzt man

$$Q_m^{n,\lambda}(n_0)=\sum_{\nu=0}^{n}Q_m^{\nu,\lambda-1}(n_0),\quad\lambda=1,2,\ldots l,$$

$$Q_m^{n,0}(n_0)=\sum_{\nu=0}^{n+n_0}a_m^\nu,$$

so ist nach Voraussetzung

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} S_{m,k}^{n,l}(0, n_0) =$$

$$= \lim_{m,n=\infty} \frac{k!\,l!}{(m+1)^k (n+1)^l} \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m+k-\mu-1}{k-1} \sum_{\pi=0}^{\mu} Q_\pi^{n,l}(n_0) = s. \quad (1)$$

Unsere Behauptung lautet dann dahin, daß

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} x^\mu Q_\mu^{n,l}(n_0) \quad (2)$$

für $|x| < 1$ vorhanden ist.

Nach Nr. 2 (6) ist

$$\left| \frac{l!}{(n+1)^l} \sum_{\pi=0}^{\mu} Q_\pi^{n,l}(n_0) \right| < 2^k \cdot G\,(\mu+1)^k, \quad \left.\begin{matrix} \mu \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2 \ldots,$$

woraus folgt, daß

$$\left| \frac{l!}{(n+1)^l} Q_\mu^{n,l}(n_0) \right| < 2^{k+1} G\,(\mu+1)^k.$$

Es ist nun

$$\sum_{\mu=0}^{m+p} x^\mu Q_\mu^{n+q,l}(n_0) - \sum_{\mu=0}^{m} x^\mu Q_\mu^{n,l}(n_0) =$$

$$= \sum_{\mu=m+1}^{m+p} x^\mu Q_\mu^{n+q,l}(n_0) + \sum_{\mu=0}^{m} x^\mu \left(Q_\mu^{n+q,l}(n_0) - Q_\mu^{n,l}(n_0) \right)$$

$$\left| \sum_{\mu=m_1+1}^{m_1+p} x^\mu Q_\mu^{n_1+q,l}(n_0) \right| < \sum_{\mu=m_1+1}^{m_1+p} 2^{k+1} G\,(\mu+1)^k |x|^\mu$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle p, q und n_1, wenn man m_1 so fixiert, daß

$$\sum_{\mu=m_1+1}^{m_1+p} (\mu+1)^k |x|^\mu < \frac{\varepsilon}{2^{k+2} G}$$

für alle p, was wegen der Konvergenz von $\sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)^k |x|^\mu$ für $|x| < 1$ immer möglich ist. m_1 ist nun fixiert. Da die Kolonnen

alle ein Mittel von der Ordnung l besitzen, so läßt sich eine Zahl n_1 so angeben, daß

$$\left| Q_\mu^{n_1+q,\,l}(n_0) - Q_\mu^{n_1,\,l}(n_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2(m_1+1)}, \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots m_1.$$

Dann ist

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m_1} x^\mu \left(Q_\mu^{n_1+q,\,l}(n_0) - Q_\mu^{n_1,\,l}(n_0) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und folglich

$$\left| \sum_{\mu=0}^{m_1+p} x^\mu Q_\mu^{n_1+q,\,l}(n_0) - \sum_{\mu=0}^{m_1} x^\mu Q_\mu^{n_1,\,l}(n_0) \right| < \varepsilon \text{ für alle } p \text{ und } q \text{ w. z. b. w.}$$

Daß dieser Mittelwert normal konvergent ist, bedarf wohl keines weiteren Beweises.

Beispiel: $s(x, y) = \dfrac{1}{(1+x)(1+y)^2}$ konvergiert absolut für $|x| < 1$, $|y| < 1$; für $x = e^{\varphi i}$, $y = e^{\psi i}$ (φ und ψ von 0 und π verschieden) existiert der normal konvergente Mittelwert von der Ordnung (1, 2) und dem Index (0, 0). Infolgedessen existiert für $|x| < 1$, $y = e^{\psi i}$ der normal konvergente Mittelwert von der Ordnung (0, 2) und dem Index (0, 0), für $|y| < 1$, $x = e^{\varphi i}$ der normal konvergente Mittelwert von der Ordnung (1, 0) und dem Index (0, 0).

Anmerkung.

Zur Ergänzung dieses Kapitels mögen hier noch einige Erweiterungen des in der Einleitung erwähnten Satzes 2, der die Konvergenz der Zeilenreihe voraussetzt, angeführt werden. Die sehr einfachen Beweise dürfen wohl übergangen werden.

Der von Bromwich und Hardy gegebene Beweis[1]) des Satzes 2 stützt sich darauf, daß man unter Voraussetzung der Endlichkeit der Partialsummen die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} q_\mu(y)$ und ihre Übereinstimmung mit $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu y^\nu$ zeigen kann. Durch zweimalige Anwendung des Abelschen Grenzwertsatzes für einfache Reihen folgt dann die Gleichung

$$\lim_{y=1} \lim_{x=1} s(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$$

für den Bereich (A, A_1).

[1]) l. c., p. 166—168.

Die Voraussetzung der Endlichkeit der Partialsummen ist indes eine sehr enge. Zunächst ist klar, daß der Grenzwertsatz sicher besteht, wenn $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu y^\nu$ für $|y|<1$ absolut konvergiert. Bezeichnen wir mit R den einen Maximalradius der Potenzreihe (nach Herrn Hartogs), d. h. die obere Grenze aller r, für die ein von Null verschiedenes r' existiert, so daß $s(x,y)$ für $|x|<r$, $|y|<r'$ absolut konvergiert, so können wir den Satz aussprechen:

Konvergiert die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ und ist $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und $R>1$, so besteht im Bereiche (A, A_1) die Gleichung

$$\lim_{y=1}\lim_{x=1} s(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu.$$

Es ist also nur noch der Fall $R=1$ von Interesse. Hier kann man aber leicht den Satz aufstellen:

Konvergiert die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ und ist $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent und $R=1$, so besteht in (A, A_1) die Gleichung $\lim_{y=1}\lim_{x=1} s(x,y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ sicher, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) Die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu y^\nu$ ist für $|y|<1$ absolut konvergent.

b) Bezeichnet man mit g_ν die obere Grenze des absoluten Betrags der Partialsummen der ν^{ten} Zeile, so ist

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{g_\nu} \leqq 1.$$

c) Es ist für alle x im Bereiche A und alle $|y| \leqq \rho < 1$

$$|s(x,y)| < G_\rho$$

wie nahe auch ρ der 1 kommt.

Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn $s(x,y)$ für $x=1$, $|y| \leqq \rho < 1$ regulär ist.

Dieser Satz läßt eine Erweiterung zu für den Fall, daß die Zeilen alle arithmetische Mittel derselben Ordnung besitzen und die Reihe dieser Mittelwerte selbst wieder konvergiert oder einen Mittelwert besitzt.

Endlich kann man auch den Fall betrachten, daß die Zeilen zwar alle konvergieren, aber die $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ eigentlich divergent[1]) ist. Dann läßt sich nämlich der Satz aufstellen:

Ist die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu$ eigentlich divergent und konvergiert $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut, so besteht die Gleichung:

$$\lim_{\varrho_1=1} \lim_{\varrho=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty,$$

wenn eine der obigen Bedingungen *a*) *b*) *c*) erfüllt ist; und ohne weiteres ist diese Gleichung richtig, wenn $R>1$.

Schließlich sollen noch zwei Beispiele angegeben werden, in denen das Verhalten der Funktion $s(x, y)$ diametral verschieden von dem der Zeilenreihe ist und aus denen hervorgeht, daß der Satz 2 der Einleitung im Gegensatz zu Satz 1 kaum so modifiziert werden kann, daß er allgemein gültig ist.

1. Betrachten wir die Funktion:

$$s(x, y) = \frac{x + (2y-1)\sum_{\lambda=0}^{\infty} 2^\lambda y^\lambda x^{2^\lambda}}{1-y}$$

Die Doppelreihe ist für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut konvergent; ihre Zeilenreihe konvergiert für $x=1$, $y=1$ gegen Null. Für $x=1$, $\varrho_1>\frac{1}{2}$ divergiert indessen die Kolonnenreihe $\sum_{\mu=0}^{\infty} q_\mu(\varrho_1)$ eigentlich. Daher ist $\lim_{\varrho=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty$ und also auch

$$\lim_{\varrho_1=1} \lim_{\varrho=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty,$$

obgleich die Zeilenreihe gegen Null konvergiert. (Es ist hier wesentlich, daß die absolute Konvergenz von $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$

[1]) Für Doppelreihen hat Herr Bromwich (Proceed. Lond. Math. Soc. (2), 6, 1908, p. 68) gezeigt, daß $\lim_{\varrho, \varrho_1=1} s(\varrho, \varrho_1) = \infty$, wenn $\sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ eigentlich divergiert und die Partialsummen der Zeilen und Kolonnen unter endlichen Grenzen g_ν und g_μ bleiben. Diese letztere Voraussetzung ist unnötig eng und kann unter Anwendung bekannter Schlußweisen durch die Bedingung ersetzt werden, daß $p_\nu(\varrho)$ und $q_\mu(\varrho_1)$ im Intervalle $0 \leqq \varrho \leqq 1$, $0 \leqq \varrho_1 \leqq 1$ unter endlichen Grenzen bleiben. (Auch diese Bedingung ist nicht notwendig.)

feststeht. In der Tat zeigt das Beispiel $s(x, y) = \frac{1 - x}{(1 - y)(1 - 2xy)}$, bei dem die Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu = 0$ ist, während die Kolonnenreihe für $\rho_1 > \frac{1}{2}$ eigentlich divergiert, daß der Grenzwertsatz wieder in Kraft treten kann, wenn die Reihe $s(x, y)$ nicht im ganzen Gebiet $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert.)

2. Sei $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu$ eine Reihe mit dem Konvergenzradius 1, welche die Punkte einer reellen von unten gegen 1 konvergierenden Zahlenfolge $(y_\varkappa)$ zu Nullstellen besitzt und $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu$ eine eigentlich divergente Reihe, für die $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|\gamma_\nu|} = 1$. Man bestimme eine Zahlenfolge b_λ durch die Rekursionsformel:

$$a_\nu b_0 + a_{\nu-1} b_1 + \cdots a_0 b_\nu = \gamma_\nu$$

und dann eine monoton ins Unendliche wachsende Folge ganzer Zahlen m_λ so, daß

$$\overline{\lim_{\lambda=0}} \sqrt[m_\lambda]{|b_\lambda|} = 1 .$$

Dann ist

$$s(x, y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x^{m_\lambda} y^\lambda$$

dargestellt durch eine für $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergente Doppelreihe, deren Zeilenreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu$ eigentlich divergiert, während für jeden Wert $y = y_\varkappa$ $\lim_{x=1} s(x, y_\varkappa) = 0$ und infolgedessen $\lim_{y=1} \lim_{x=1} |s(x, y)| = 0$ ist.

II. Der Abelsche Grenzwertsatz für dreifache Reihen.

§ 6.

Nachdem im vorhergehenden Kapitel der Abelsche Grenzwertsatz für Doppelreihen seine Erledigung gefunden hat, sollen jetzt dieselben Untersuchungen für dreifache Reihen ausgeführt werden. Die angewandten Beweismethoden erlauben uns dabei, sehr viele Ergebnisse des I. Kapitels zu übernehmen, so daß es uns möglich wird, die Aufmerksamkeit nahezu ausschließlich auf die merkwürdigen Unterschiede zwischen dreifachen und zweifachen Reihen zu richten.

1. In dem einfachsten Falle, daß die Partialsummen der dreifachen Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ unter endlicher Grenze bleiben, ist schon von Bromwich und Hardy (l. c. p. 166 o.) darauf aufmerksam gemacht worden, daß der Beweis des Abelschen Grenzwertsatzes sich von dem Beweis bei zweifachen Reihen nicht prinzipiell unterscheidet und wir können unter Berufung auf die genannten Autoren den Satz an die Spitze stellen:

„Bleiben die Partialsummen der dreifachen Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ unter endlicher Grenze und konvergiert die Reihe gegen s, so konvergiert

$$s(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$$ [1])

für $|x_\nu| < 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$ absolut und es gilt im Bereiche (A_1, A_2, A_3) [2]) die Relation:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s.$$"

---

[1]) Da wir jetzt die gleichwertigen Indizes μ_1, μ_2, μ_3 nebeneinander schreiben, so sollen in diesem Kapitel obere Indizes wieder eingeklammert werden.

[2]) D. h. in dem Teil des Kreisgebietes $|x_\nu| \leq 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$, der gleichzeitig den Ungleichungen $\frac{|1 - x_\nu|}{1 - |x_\nu|} < g_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ genügt. Bromwich und Hardy setzen übrigens, wie schon in der Einleitung erwähnt, x_1, x_2, x_3 reell voraus.

Was den Beweis des Satzes betrifft, so kann er wie bei Doppelreihen auf zwei Arten geschehen, entweder nach der Dirichletschen Methode oder durch Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz in einem bestimmten, dem früheren Bereiche $\mathfrak{B}$ entsprechenden sechsdimensionalen Gebiet.

Liegt nun eine beliebige konvergente Reihe $\sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ vor, so sehen wir wiederum von der Untersuchung des Konvergenzbereiches ab und nehmen an, es sei $s(x_1, x_2, x_3)$ für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent. Wie früher können wir wieder eine neue Reihe $\sum b_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ aus der vorgelegten Reihe bilden, welche ebenfalls gegen s konvergiert und deren Partialsummen überdies unter endlicher Grenze bleiben. Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$\sum_{\mu_1=0}^{m_1} \sum_{\mu_2=0}^{m_2} \sum_{\mu_3=0}^{m_3} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} = s_{m_1, m_2, m_3}$$

$$s_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} - s_{\mu_1 - 1, \mu_2, \mu_3} = \Delta_1 s_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$$

und definieren entsprechend $\Delta_2 s_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ und $\Delta_3 s_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ und ist

$$|s_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}| < G \quad \text{für} \quad \mu_\nu \geqq m_\nu - 1,$$

so definieren wir

$$b_{\pi_1, \pi_2, \pi_3} = \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 s_{m_1 + \pi_1, m_2 + \pi_2, m_3 + \pi_3} = a_{m_1 + \pi_1, m_2 + \pi_2, m_3 + \pi}$$

$$\text{wenn } \pi_1, \pi_2, \pi_3 > 0,$$

dagegen

$$b_{0, \pi_2, \pi_3} = \Delta_2 \Delta_3 s_{m_1, m_2 + \pi_2, m_3 + \pi_3} \quad \text{wenn } \pi_2 > 0, \pi_3 > 0$$

$$b_{\pi_1, 0, 0} = \Delta_1 s_{m_1 + \pi_1, m_2, m_3} \quad \text{„} \quad \pi_1 > 0$$

und entsprechend

$$b_{\pi_1, 0, \pi_3}, \; b_{\pi_1, \pi_2, 0}, \; b_{0, \pi_2, 0}, \; b_{0, 0, \pi_3} \text{ und } b_{0, 0, 0} = s_{m_1, m_2, m_3}$$

und betrachten wie früher:

$$s_1(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\pi_1, \pi_2, \pi_3 = 0}^{\infty} b_{\pi_1, \pi_2, \pi_3} x_1^{\pi_1} x_2^{\pi_2} x_3^{\pi_3}.$$

$\sum b_{\pi_1, \pi_2, \pi_3}$ ist jetzt ebenfalls konvergent, hat den Wert s und genügt der Ungleichung:

$$\left| \sum_{\pi_1, \pi_2, \pi_3 = 0}^{p_1, p_2, p_3} b_{\pi_1, \pi_2, \pi_3} \right| < g \quad \text{für alle } p_1, p_2, p_3.$$

Dann ist nach dem oben angeführten Satze im Bereiche (A_1, A_2, A_3):

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s_1(x_1, x_2, x_3) = s.$$

Man weist nun ohne Schwierigkeit die Identität nach:

$$\left.\begin{aligned} & x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \sum_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 = 0}^{\infty} b_{\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3} x_1^{\varkappa_1} x_2^{\varkappa_2} x_3^{\varkappa_3} = \\ & = \sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3 = 0}^{m_1-1, m_2-1, m_3-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1})(x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} + \\ & + C\left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1, m_3-1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} + \\ & + C\left\{ \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} + \\ & + s(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn C jeweils die Summation über die drei aus der $\{\ \}$ durch zyklische Vertauschung der Indizes zu bildenden Ausdrücke bedeutet.

Da nun der erste Term der rechten Seite für $\lim x_\nu = 1$ gegen Null konvergiert, so folgt zunächst aus der Konvergenz von $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ unter allen Umständen der Grenzwertsatz:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} \left(s(x_1, x_2, x_3) + C\left\{ \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} + \right.$$

$$\left. + C\left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1, m_3-1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right) = s. \quad (2)$$

Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgesucht werden, daß man die beiden Zusatzsummen weglassen darf, d. h. daß sie für $\lim x_\nu = 1$ verschwinden.

2. Zu dem angegebenen Zwecke erweist es sich als notwendig, die Art des Unendlichwerdens zweifacher Reihen näher zu betrachten.

Es sei $s(x_1, x_2)$ eine für $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$ absolut konvergente Doppelreihe, die im Bereiche $(B_1, B_2) \leqq (A_1, A_2)$ in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2 = 1$ über alle Grenzen wächst.[1]) Ferner seien $s_{\mu_2}(x_1)$ und $s_{\mu_1}(x_2)$ einfache Reihen,[2]) die ebenfalls

[1]) D. h. $\overline{\lim_{x_1, x_2 = 1}} |s(x_1, x_2)| = \infty$.

[2]) Die Verschiedenheit des Arguments soll immer gleichzeitig Verschiedenheit der Funktionen bedeuten, so daß also $s_0(x_1)$ eine ganz andere Funktion von x_1 darstellt als $s_0(x_2)$ von x_2.

für $|x_1|<1$, $|x_2|<1$ absolut konvergieren und im Bereiche B_1 bezw. B_2 in der Umgebung der Stelle $x_1=1$ bezw. $x_2=1$ über alle Grenzen wachsen. Dann ist auch für den Ausdruck

$$S(x_1, x_2)=\sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} s_{\mu_1}(x_2)+\sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} s_{\mu_2}(x_1)$$

die obere Grenze des absoluten Betrages in der dem Bereiche (B_1, B_2) angehörigen Umgebung des Punktes $x_1, x_2=1$ unendlich.

Es können nun die folgenden beiden Fälle eintreten:

a) Es ist ein $S(x_1, x_2)$ durch Wahl der endlichen Zahlen M_1 und M_2 und der $s_{\mu_1}(x_2)$, $s_{\mu_2}(x_1)$, von denen beliebig viele, nur nicht alle, gleich Null sein dürfen, angebbar, so daß:

$$|s(x_1, x_2)-S(x_1, x_2)|<G$$

im Bereiche (B_1, B_2), wenn $|1-x_1|<\delta_1$, $|1-x_2|<\delta_2$. Diese letztere Ungleichung soll im folgenden, da uns ausschließlich das Verhalten der Reihen an der Stelle $x_1, x_2=1$ interessiert, immer stillschweigend vorausgesetzt werden, wenn von dem Bereiche (B_1, B_2) die Rede ist. [Entsprechend bei den Bereichen (B_2, B_3), (B_3, B_1) und (B_1, B_2, B_3).]

b) Es gibt kein $S(x_1, x_2)$ von der verlangten Eigenschaft.

Die Doppelreihen des Falles *a*) wollen wir als Reihen erster Art in (B_1, B_2) bezeichnen, die des Falles *b*) als solche zweiter Art in (B_1, B_2).

Einige Beispiele mögen diese Klassifikation der Doppelreihen erläutern:

1. Die Reihe $s(x_1, x_2)=\dfrac{1}{2-(x_1+x_2)}$ wächst an der Stelle $x_1, x_2=1$ im Bereiche (A_1, A_2) über alle Grenzen. Es ist hier unmöglich, einen Ausdruck $S(x_1, x_2)$ anzugeben, der von $s(x_1, x_2)$ subtrahiert eine endlich bleibende Funktion ergäbe. Denn es ist $|s(x_1, x_2)|<\begin{cases} G_{x_1} & \text{für jedes } x_2 \\ G_{x_2} & \text{„ \quad „ \quad } x_1 \end{cases}$, welche Ungleichungen auch für $S(x_1, x_2)$ gelten müßten und nach § 3 Nr. 2 zur Folge hätten, daß jedes der $s_{\mu_1}(x_2)$ und $s_{\mu_2}(x_1)$ von $S(x_1, x_2)$ endlich bleibt. Dann müßte aber auch $s(x_1, x_2)$ unter endlicher Grenze bleiben. Unser $s(x_1, x_2)$ ist also von der zweiten Art.

2. Betrachten wir dagegen

$$s(x_1, x_2)=\sum_{\mu_1=0}^{\infty}\sum_{\mu_2=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\mu_2}(\sqrt{\mu_1})^{\mu_2}}{\mu_2!}x_1^{\mu_1}x_2^{\mu_2}=\sum_{\mu_1=0}^{\infty}(e^{-\sqrt{\mu_1}x_2}-1)\,x_1^{\mu_1}$$

so bleibt $s(x_1, x_2)$ an der Stelle $x_1, x_2 = 1$ nicht unter endlicher Grenze, während

$$\left| s(x_1, x_2) + \sum_{\mu_1=0}^{\infty} x_1^{\mu_1} \right| = \left| \sum_{\mu_1=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu_1}\, x_2} x_1^{\mu_1} \right| < g.$$

Also ist $s(x_1, x_2)$ von der ersten Art.

Die Art der Doppelreihen ist von der Wahl des Bereiches (B_1, B_2) abhängig; so ist die Reihe

$$s(x_1, x_2) = \frac{1}{1 - x_1} + e^{-\frac{1}{(1-x_1)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(1-x_2)^2}}$$

von der Art 1, wenn der Bereich $(B_1, B_2) \leqq (A_1, A_2)$ gemäß § 3, Nr. 3, Beispiel 3, passend gewählt wird, während im ganzen Bereich (A_1, A_2) die Reihe von der zweiten Art ist.

Eine zweifache Reihe kann in der Umgebung des Punktes (1, 1) unter endlicher Grenze bleiben, ohne daß die in ihr enthaltenen einfachen Reihen sich ebenso verhalten, während anderseits auch die einfachen Reihen endlich bleiben können, ohne daß die Funktion $s(x_1, x_2)$ an der Stelle (1, 1) endlich bleibt.

Beispiele: $\sum_{\mu_1=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu_1}\, x_2} x_1^{\mu_1}$ bleibt unter endlicher Grenze, während die Zeilen $\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{\mu_1})^{\mu_2}}{\mu_2!} x_1^{\mu_1}$ über alle Grenzen wachsen.

$\sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} \frac{x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}}{(\mu_1 + \mu_2 + 1)^2}$ bleibt in der Umgebung der Stelle $x_1, x_2 = 1$ nicht endlich, während alle Zeilen und Kolonnen an der Stelle (1, 1) sogar einen endlichen Grenzwert besitzen.

Selbst wenn aber $s(x_1, x_2)$ von der ersten Art unendlich wird und auch Zeilen und Kolonnen von $s(x_1, x_2)$ unendlich werden, besteht zwischen den Zeilen und Kolonnen von $s(x_1, x_2)$ und dem $S(x_1, x_2)$, welches $s(x_1, x_2)$ in seinem Unendlichwerden kompensiert, kein Zusammenhang, wie das Beispiel $s(x_1, x_2) = \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \sum_{\mu_2=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu_2} (\sqrt{\mu_1})^{\mu_2}}{\mu_2!} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}$ lehrt. Denn diese Reihe besitzt unendlich viele Zeilen, welche in der Umgebung der Stelle (1, 1) über alle Grenzen wachsen, während in dem zugehörigen $S(x_1, x_2)$ nur eine einzige Zeile auftritt $\left(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} x_1^{\mu_1} \right)$ und gerade an der Stelle, an der die vorgelegte Reihe überhaupt keine Zeile besitzt.

Es besteht also im allgemeinen kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Art der Doppelreihe und dem Verhalten ihrer Zeilen und Kolonnen. Wohl aber existiert ein solcher, wenn die Partialsummen der Reihe $s(1, 1)$ von einem bestimmten Indexpaar ab unter endlicher Grenze bleiben. Man kann nämlich den folgenden Satz beweisen:

1. Bleiben die Partialsummen $\sum_{\mu_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{\mu_n=0}^{m_n} a_{\mu_1 \ldots \mu_n} = s_{m_1 \ldots m_n}$ der Reihe $\sum a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n}$ sämtlich unter endlicher Grenze, so bleibt auch die Reihe $\sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n} = s(x_1, x_2 \ldots x_n)$ im Bereiche $(A_1, A_2 \ldots A_n)$ unter endlicher Grenze.

Beweis: Es ist

$$s(x_1, x_2 \ldots x_n) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n=0}^{\infty} s_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \ldots x_n^{\mu_n}.$$

Daher

$$|s(x_1, x_2 \ldots x_n)| < g\,|1-x_1|\,|1-x_2|\ldots|1-x_n| \sum_{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n=0}^{\infty} |x_1|^{\mu_1} |x_2|^{\mu_2} \ldots |x_n|^{\mu_n}$$

$$= g\,\frac{|1-x_1|}{1-|x_1|} \cdot \frac{|1-x_2|}{1-|x_2|} \cdot \cdots \frac{|1-x_n|}{1-|x_n|} < g\,g_1\,g_2 \cdots g_n$$

w. z. b. w.

Daraus können wir die Folgerung ziehen:

2. Bleiben die Partialsummen s_{m_1, m_2} der Reihe $\sum_{\mu_1, \mu_2=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2}$ für $m \geqq M_1$, $n \geqq N_1$ unter endlicher Grenze, so ist in $(B_1, B_2) \leqq (A_1, A_2)$ $s(x_1, x_2)$ entweder endlich oder wird von der ersten Art unendlich und es ist in diesem Falle

$$\left| \sum_{\mu_1, \mu_2=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} - \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_2^{\mu_2} - \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_1^{\mu_1} \right| < g,$$

d. h. das zu $s(x_1, x_2)$ gehörige $S(x_1, x_2)$ ist jetzt aus Zeilen und Kolonnen der Doppelreihe gebildet.

Der Satz leuchtet unmittelbar ein, wenn man beachtet, daß die Partialsummen von $\sum_{\mu_1, \mu_2=M_1+1, M_2+1}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2}$ der Bedingung des Satzes 1 genügen und daß diese Reihe somit in (A_1, A_2) unter endlicher Grenze bleibt.

Endlich soll noch die Bemerkung ausgesprochen werden:

3. Wird $s(x_1, x_2)$ in (B_1, B_2) von der ersten Art unendlich, und sind

$$S(x_1, x_2) = \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} s_{\mu_1}(x_2) + \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} s_{\mu_2}(x_1)$$

und

$$S'(x_1, x_1) = \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} s'_{\mu_1}(x_2) + \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} s'_{\mu_2}(x_1)$$

zwei Ausdrücke, die das Unendlichwerden von $s(x_1, x_2)$ aufheben, so daß also:

$$|s(x_1, x_2) - S(x_1, x_2)| < G \text{ und } |s(x_1, x_2) - S'(x_1, x_2)| < G,$$

so folgt, daß

$$|s_{\mu_1}(x_2) - s'_{\mu_1}(x_2)| < g, \quad |s_{\mu_2}(x_1) - s'_{\mu_2}(x_1)| < g.$$

Es folgt nämlich aus den beiden vorausgesetzten Ungleichungen:

$$\left| \sum_{\mu_1=0}^{M_1} x_1^{\mu_1} \left(s_{\mu_1}(x_2) - s'_{\mu_1}(x_2)\right) + \sum_{\mu_2=0}^{M_2} x_2^{\mu_2} \left(s_{\mu_2}(x_1) - s'_{\mu_2}(x_1)\right) \right| < G',$$

woraus sich nach bekannter Schlußweise die Behauptung ergibt.

§ 7.

1. Nunmehr sind wir in der Lage, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für den Grenzwertsatz $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$ aufzusuchen.

Wir wollen von $s(x_1, x_2, x_3)$ annehmen, daß die Partialsummen s_{μ_1, μ_2, μ_3} für $\mu_\nu \geqq m_\nu - 1$ $(\nu = 1, 2, 3)$ unter endlicher Grenze bleiben sollen und daß $s(x_1, x_2, x_3)$ im Bereiche $(B_1, B_2, B_3) \leqq (A_1, A_2, A_3)$ ebenfalls unter endlicher Grenze bleibt. Da dann die Reihe

$$\sum_{\mu_1, \mu_2, \mu_3 = m_1, m_2, m_3}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$$

in (B_1, B_2, B_3) nach § 6, Nr. 2, Satz 2, unter endlicher Grenze bleibt, so folgt dasselbe von

$$\left.\begin{aligned} s(x_1, x_2, x_3) - \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3 = m_1,m_2,m_3}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \equiv \\ \equiv C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} \\ - C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \\ + \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{m_1-1,\,m_2-1,\,m_3-1} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Von dem letzten Gliede der rechten Seite dürfen wir wegen seiner Endlichkeit absehen, so daß also

$$\left.\begin{aligned} \left| C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} - \right. \\ \left. - C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right| < G. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Nun legen wir den x_1 m_1 voneinander und von 1 verschiedene Werte, $x_1^{(\nu)}$ bei, die gleichzeitig dem Bereich B_1 und dem Kreisgebiet $|1 - x_1| < \delta_1$ angehören, und bestimmen m_1 verschiedene Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{m_1}$ durch die Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} = \begin{cases} 0 \text{ für } \mu_1 \neq \mu_1' \\ 1 \quad \text{„} \quad \mu_1 = \mu_1' \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mu_1 = 0, 1, \ldots m_1 - 1. \\ (\mu_1' \text{ sei eine beliebige Zahl} \\ \text{dieser Reihe.}) \end{matrix} \quad (3)$$

Wir bilden jetzt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \left(C\left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} - \right.$$

$$\left. - C\left\{ \sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} \right\} \right) \Bigg|$$

$$< G \sum_{\nu=1}^{m_1} |\lambda_\nu| < G'.$$

Jede der Reihen $\sum_{\mu_1, \mu_2 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_2^{\mu_2}$ und

$\sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_3^{\mu_3}$ stellt eine einfache Potenzreihe in x_2 bezw. x_3 dar; ebenso enthält die zweite $\{\ \}$ der Ungleichung nur noch einfache Reihen in x_2 und x_3. Daher können wir setzen:

$$\sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} \sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_3^{\mu_3} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1, \mu_2 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} x_2^{\mu_2} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m_1} \lambda_\nu C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1,\ m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \left(x_1^{(\nu)}\right)^{\mu_1} \right\} \equiv$$

$$\equiv - \sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1')}(x_3) - \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1')}(x_2),$$

so daß mit Rücksicht auf (3), wenn wir wieder μ_1 statt μ_1' schreiben:

$$\left| \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} - \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) \right| < g \tag{4}$$

$$\mu_1 = 0, 1, \ldots m_1 - 1.$$

Jede $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$ ist also in (B_1, B_2) entweder endlich oder wird höchstens von der ersten Art unendlich. Die gleiche Aussage gilt selbstverständlich auch für die durch zyklische Vertauschung der Indizes hervorgehenden Doppelreihen.

Aus (2) und (4) folgt nun:

$$\left| C \left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2-1,\ m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right| < G''$$

oder

$$\left| C\left\{ \sum_{\mu_2,\,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} \left(p_{\mu_2}^{(\mu_3)}(x_1) + p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) - \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right) x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} \right| < G''.$$

Bezeichnen wir der Abkürzung halber die ( ) mit $q_{\mu_2,\mu_3}(x_1)$, so ist

$$\left| C\left\{ \sum_{\mu_2,\,\mu_3=0}^{m_2-1,\,m_3-1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} q_{\mu_2,\mu_3}(x_1) \right\} \right| < G''.$$

Durch passende Wahl von m_2 festen Werten $x_2^{(\nu)}$ und geeignete Bestimmung von m_2 Konstanten $\varkappa_\nu$ erhalten wir durch gleiche Schlußweise, wie oben:

$$\left| \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} q_{\mu_2,\mu_3}(x_1) + \sum_{\nu=1}^{m_2} \varkappa_\nu \sum_{\mu_1,\mu_3=0}^{m_1-1,\,m_3-1} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} q_{\mu_1,\mu_3}(x_2^{(\nu)}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{m_2} \varkappa_\nu \sum_{\mu_1,\mu_2=0}^{m_1-1,\,m_2-1} x_1^{\mu_1} (x_2^{(\nu)})^{\mu_2} q_{\mu_1,\mu_2}(x_3) \right| < G'' \sum_{\nu=1}^{m_2} |\varkappa_\nu| < G'''$$

oder, wie wir zur Abkürzung schreiben können:

$$\left| \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} q_{\mu_2,\mu_3}(x_1) + \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} x_1^{\mu_1} q'_{\mu_1}(x_3) \right| < G'''.$$

Aus dieser Ungleichung folgt aber bekanntlich:

$$|q_{\mu_2,\mu_3}(x_1)| < g'$$

oder:

$$\left| p_{\mu_2}^{(\mu_3)}(x_1) + p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) - \sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} \right| < g'.^{1}) \quad \begin{matrix} \mu_2 = 0, 1, 2, \ldots m_2 - 1 \\ \mu_3 = 0, 1, 2, \ldots m_3 - 1 \end{matrix} \quad (5)$$

Damit sind die notwendigen Bedingungen gefunden:

1. Jede der m_1 Reihen $\sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$ muß in (B_2, B_3) entweder endlich bleiben oder darf höchstens von der ersten Art unendlich werden. Gleiches gilt von den durch zyklische

[1]) Entsprechend hat man durch zyklische Vertauschung der Indizes noch zwei andere Ungleichungssysteme.

Vertauschung hervorgehenden Reihen. (Für die Reihen $\sum_{\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$, für welche $\mu_1 \geqq m_1$ ist, ist die Forderung gemäß § 6, Nr. 2, Satz 2, von selbst erfüllt.)

2. Ersetzt man in (2) die Doppelreihen durch die Ausdrücke $\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2)$ und faßt diese mit den $\sum_{\mu_\nu=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_\nu^{\mu_\nu}$ zusammen, so müssen alle resultierenden einfachen Reihen unter endlichen Grenzen bleiben [in (B_1, B_2, B_3)].

Wir wollen eine Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$, für die es zu jedem M_1, M_2, M_3 ein $m_\nu \geqq M_\nu$ gibt, so daß $\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} -$ $- \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=m_1,m_2,m_3}^{\infty} a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3}$ den angegebenen Bedingungen 1 und 2 genügt, reduktibel in (B_1, B_2, B_3) nennen.

Bleiben die Partialsummen von $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ von einem bestimmten Indextripel ab unter endlicher Grenze, so leuchtet aus den angestellten Überlegungen unmittelbar ein, daß die Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) auch hinreichend ist dafür, daß $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) endlich bleibt und wir haben das Ergebnis:

Bleiben die Partialsummen s_{μ_1,μ_2,μ_3} der Reihe $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ für $\mu_\nu \geqq m_\nu$ unter endlicher Grenze und ist $s(x_1, x_2, x_3)$ für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) unter endlicher Grenze bleibt, in der Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3).[1])

2. Es soll nun gezeigt werden, daß im Falle der Konvergenz von $\sum a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}$ die Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ für die Gleichung $\lim_{x_1,x_2,x_3=1} s(x_1, x_2, x_3) = s$ auch hinreicht. (Ihre Notwendigkeit ergibt sich aus dem Resultat von Nr. 1.) Dazu brauchen wir noch eine Eigenschaft der $p_{\mu_i}^{(\mu_2)}(x_3)$. Nehmen wir nämlich an, es sei $|s_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}| < g$

[1]) Es sei hier ausdrücklich erwähnt, daß nur vom Verhalten der dreifachen Reihe in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ die Rede ist. Die Reihe braucht nicht im ganzen Gebiet (B_1, B_2, B_3) endlich sein, wie das Beispiel $s(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1) \sum_{\mu_2=0}^{\infty} e^{-\sqrt{\mu_2} x_3} x_2^{\mu_2}$ lehrt. Dieses Verhalten hat bei zweifachen Reihen — die Bedingungen des eben ausgesprochenen Satzes vorausgesetzt — kein Analogon.

für $\mu_\nu \geqq m_\nu - 1$ und es seien die Ungleichungen (4) und (5) der vorigen Nummer erfüllt. Dann ist

$$\sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$$

entweder endlich oder von der ersten Art in (A_1, A_3), und zwar ist nach § 6, Nr. 2, Satz 2

$$\left| \sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} - \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1 - 1} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu_3 = 0}^{m_3 - 1} x_3^{\mu_3} \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} x_1^{\mu_1} \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} \right| < G.$$

Anderseits ist aber

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} \left\{ \sum_{\mu_1, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} - \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1 - 1} x_1^{\mu_1} p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) - \sum_{\mu_3 = 0}^{m_3 - 1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) \right\} \right| < G,$$

woraus man nach § 6, Nr. 2, Satz 3 schließt, daß

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) - \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_3^{\mu_3} \right| < g,$$

während nach (5) von Nr. 1:

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) - \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_3^{\mu_3} \right| < g'.$$

Durch Subtraktion dieser beiden Ungleichungen folgt

$$\left| \sum_{\mu_2 = 0}^{m_2 - 1} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) \right| < g'', \tag{1}$$

zu welcher Ungleichung durch Vertauschung der Indizes sich fünf weitere gesellen.

Wir knüpfen nun an Gleichung (2) von § 6 an, welche lautet:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} \left(s(x_1, x_2, x_3) + C \left\{ \sum_{\mu_1 = 0}^{m_1 - 1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} \right\} + \right.$$

$$\left. + C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{m_2 - 1, m_3 - 1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2})(x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \sum_{\mu_1 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} \right\} \right) = s. \tag{2}$$

Nach Gleichung (4) der vorigen Nummer ist

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} C \left\{ - \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \sum_{\mu_2, \mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{\mu_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{\mu_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) \right\} = 0 \quad (3)$$

und nach (1)

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} C \left\{ \sum_{\mu_1=0}^{m_1-1} (x_1^{m_1} - x_1^{\mu_1}) \left(\sum_{\mu_2=0}^{m_2-1} x_2^{m_2} p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) + \sum_{\mu_3=0}^{m_3-1} x_3^{m_3} p_{\mu_3}^{(\mu_1)}(x_2) \right) \right\} = 0. \quad (4)$$

Addiert man (2) und (3) und subtrahiert (4), so folgt:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) +$$

$$C \left\{ \sum_{\mu_2, \mu_3=0}^{m_2-1, m_3-1} (x_2^{m_2} - x_2^{\mu_2}) (x_3^{m_3} - x_3^{\mu_3}) \left(\sum_{\mu_1=0}^{\infty} a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3} x_1^{\mu_1} - p_{\mu_2}^{(\mu_3)}(x_1) - p_{\mu_3}^{(\mu_2)}(x_1) \right) \right\} = s,$$

woraus sich nach (5) der vorigen Nummer sofort ergibt:

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s.$$

Wir können nunmehr den Satz aussprechen:

A. „Konvergiert die dreifache Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im Punkte $x_1, x_2, x_3 = 1$ gegen s und ist die Reihe für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent, so ist für das Bestehen der Gleichung

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$$

im Bereiche $(B_1, B_2, B_3) \leqq (A_1, A_2, A_3)$ die Reduktibilität von $s(x_1, x_2, x_3)$ im gleichen Bereiche notwendig und hinreichend".

Da schließlich die Endlichkeit von $s(x_1, x_2, x_3)$ in (B_1, B_2, B_3) im Verein mit der Konvergenz der Reihe in $x_1, x_2, x_3 = 1$ die Reduktibilität bedingt, so können wir dem Satze auch die Fassung geben:

B. „Konvergiert die dreifache Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im Punkte $x_1, x_2, x_3 = 1$ gegen s und ist die Reihe für $|x_\nu| < 1$ absolut konvergent, so ist für das Bestehen der Gleichung

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$$

im Bereiche $(B_1, B_2, B_3) \leqq (A_1, A_2, A_3)$ notwendig und hinreichend, daß die Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im gleichen Bereiche in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ unter endlicher Grenze bleibt".

Die Fassung B wird dann immer von Vorteil sein, wenn man das Verhalten der Funktion $s(x_1, x_2, x_3)$ an der Stelle $x_1, x_2, x_3 = 1$ schon kennt und nur noch die Gewißheit braucht, daß die im Punkte 1 konvergente Reihe dort auch den Grenzwert der Funktion darstellt, während die Fassung A uns ein Mittel an die Hand gibt, auch wenn wir noch gar nichts über die Funktion $s(x_1, x_2, x_3)$ wissen, durch Untersuchung ihrer zwei- und einfachen Reihen die Frage nach dem Grenzwert von $s(x_1, x_2, x_3)$ zu entscheiden.

Beispiel:

$$s(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_1)(1 - x_2) \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} (e^{-x_1 \sqrt{\mu_3}} - e^{-x_2 \sqrt[3]{\mu_3}})\, x_3^{\mu_3}.$$

Da in (A_1, A_3) bezw. in (A_2, A_3) die Reihe $\sum e^{-x_1 \sqrt{\mu_3}} x_3^{\mu_3}$ bezw. $\sum e^{-x_2 \sqrt[3]{\mu_3}} x_3^{\mu_3}$ unter endlicher Grenze bleibt, so ist $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = 0$. Da indes die Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ für $x_1, x_2, x_3 = 1$ konvergent ist, so müssen wir dasselbe Resultat — wenn auch infolge der Wahl des Beispiels auf einem ungleich umständlicheren Wege — durch Satz A erhalten.

Es ist

$$a_{0,0,\mu_3} = 0,\ a_{1,0,\mu_3} = -\sqrt{\mu_3},\ a_{\mu_1,0,\mu_3} = \frac{(-\sqrt{\mu_3})^{\mu_1}}{\mu_1!} - \frac{(-\sqrt{\mu_3})^{\mu_1 - 1}}{(\mu_1 - 1)!} \qquad (\mu_1 \geqq 2)$$

$$a_{0,1,\mu_3} = +\sqrt[3]{\mu_3},\ a_{1,1,\mu_3} = -\sqrt[3]{\mu_3} + \sqrt{\mu_3},\ a_{\mu_1,1,\mu_3} = -a_{\mu_1,0,\mu_3} \qquad (\mu_1 \geqq 2)$$

$$a_{0,\mu_2,\mu_3} = -\frac{(-\sqrt[3]{\mu_3})^{\mu_2}}{\mu_2!} + \frac{(-\sqrt[3]{\mu_3})^{\mu_2 - 1}}{(\mu_2 - 1)!} \qquad (\mu_2 \geqq 2)$$

$a_{1,\mu_2,\mu_3} = -a_{0,\mu_2,\mu_3}$, während alle anderen $a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} = 0$ sind.

Die Partialsummen s_{μ_1,μ_2,μ_3} bleiben unter endlicher Grenze, wenn $\mu_1 \geqq 1$, $\mu_2 \geqq 1$. Wir wählen daher $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 0$. Der Ausdruck $\left(\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3 = 0}^{\infty} - \sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3 = m_1, m_2, m_3}^{\infty} \right) (a_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3})$ ist dann mit $s(x_1, x_2, x_3)$ identisch.

Die Reihe $\sum_{\mu_1,\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1,0,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} = (1 - x_1) \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} (e^{-x_1 \sqrt{\mu_3}} - 1)\, x_3^{\mu_3}$ ist in (A_1, A_3) von der ersten Art und es ist

$$\left| \sum_{\mu_1,\mu_3 = 0}^{\infty} a_{\mu_1,0,\mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} + \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} x_3^{\mu_3} - x_1 \sum_{\mu_3 = 0}^{\infty} x_3^{\mu_3} \right| < g.$$

Also ist

$$p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) = \begin{cases} -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{für } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0 \\ \sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0. \end{cases}$$

Ferner ist die Reihe

$$\sum_{\mu_1, \mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1, 1, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} = \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (1 - x_1) \sqrt[3]{\mu_3}\, x_3^{\mu_3} + (x_1 - 1) \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (e^{-x_1 \sqrt[3]{\mu_3}} - 1) x_3^{\mu_3}$$

von der ersten Art und es ist:

$$\left| \sum_{\mu_1, \mu_3=0}^{\infty} a_{\mu_1, 1, \mu_3} x_1^{\mu_1} x_3^{\mu_3} - \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} + \right.$$
$$\left. + x_1 \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} \right| < g.$$

Sonach ist

$$p_{\mu_1}^{(\mu_2)}(x_3) = \begin{cases} \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{für } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 \\ -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt[3]{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1. \end{cases}$$

Ebenso findet man:

$$p_{\mu_2}^{(\mu_1)}(x_3) = \begin{cases} \sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{für } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0 \\ -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1 \\ -\sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 0 \\ \sum_{\mu_3=0}^{\infty} (\sqrt{\mu_3} + 1) x_3^{\mu_3} & \text{„ } \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 1. \end{cases}$$

Man sieht nun, daß in der Tat auch die Bedingung (5) von Nr. 1 erfüllt ist und $s(x_1, x_2, x_3)$ in (A_1, A_2, A_3) also reduktibel ist.

Gleich den Doppelreihen hat die dreifache Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ im Falle der Konvergenz von $s(1, 1, 1)$ nur die beiden Möglichkeiten: *a)* $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$; *b)* $\overline{\lim}_{x_1, x_2, x_3 = 1} |s(x_1, x_2, x_3)| = \infty$.

Während aber bei Doppelreihen im Falle a) alle einfachen Reihen (Zeilen und Kolonnen) unter endlichen Grenzen bleiben müssen, können in der Umgebung des Punktes $x_1, x_2, x_3 = 1$ bei dreifachen Reihen eine endliche Anzahl zweifacher und sogar eine unendliche Anzahl einfacher Reihen unendlich werden. Besitzt jedoch die Reihe $s(x_1, x_2, x_3)$ eine einzige zweifache Reihe, die in B_ν von der zweiten Art unendlich wird, so kann von der Grenzwertgleichung $\lim_{x_1, x_2, x_3 = 1} s(x_1, x_2, x_3) = s$ in (B_1, B_2, B_3) [1]) keine Rede sein. Wohl aber behält auch in diesem Falle die Gleichung (2) von § 6 ihre Giltigkeit, die wir in diesem Falle als den allgemeinen Abelschen Satz ansehen können. Es ist ferner möglich, in dieser Gleichung alle unter endlicher Grenze bleibenden einfachen und zweifachen Reihen wegzulassen.

Endlich können wir die ausgeführten Untersuchungen ohneweiters auf den Fall übertragen, daß die Reihe $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ einen Cesàroschen Mittelwert[2]) von der Ordnung[2]) (k_1, k_2, k_3) und beliebigem Index[2]) besitzt. Die Sätze über normal konvergente Mittelwerte und die Reduzierbarkeit beliebiger Mittelwerte auf normal konvergente lassen leicht eine Verallgemeinerung auf dreifache Reihen zu, welche uns ohneweiters die Gleichung (2) von § 6, Nr. 1, liefert, so daß die in diesem Kapitel angestellten Betrachtungen auch den Fall der Existenz des Cesàroschen Mittelwertes erledigen. Die Sätze A und B bleiben wörtlich erhalten, wenn nur die Voraussetzung der Konvergenz von $\sum a_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}$ durch die der Existenz eines Cesàroschen Mittelwertes ersetzt wird.

Durch sinngemäße Ausdehnung der in § 6, Nr. 2, ausgeführten Klassifikation zweifacher auf n-fache Reihen ist es schließlich möglich, für beliebige n-fache Reihen notwendige Bedingungen für den Abelschen Grenzwertsatz aufzustellen, die den Bedingungen 1 und 2 von Nr. 1 dieses Paragraphen analog sind. Es ist wahrscheinlich, daß diese Bedingungen sich auch als hinreichend erweisen und ich hoffe, bei anderer Gelegenheit darauf zurückkommen zu können.

---

[1]) Indessen ist es immer noch möglich, daß in einem Bereiche $(B_1', B_2', B_3') < (B_1, B_2, B_3)$ die Gleichung besteht.

[2]) Eine besondere Definition dieser Bezeichnungen für dreifache Reihen dürfte überflüssig sein.

III. Die Umkehrung des Abelschen Grenzwertsatzes für Doppelreihen.

§ 8.

Es ist bei Potenzreihen einer Veränderlichen eine bekannte Tatsache, daß der Abelsche Grenzwertsatz nicht ohne weiteres umkehrbar ist, d. h. daß aus $\lim_{x=1} s(x) = s$ nicht die Konvergenz von $s(1)$ gefolgert werden kann. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für Doppelreihen. Indessen hat Herr Pringsheim für einfache Reihen[1]) gezeigt, daß in einem besonders einfachen Fall, wenn nämlich in der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu + i\beta_\nu)$ die α_ν und β_ν unter sich von einem bestimmten ν ab gleich bezeichnet sind, aus der Gleichung $\lim_{\varrho=1} s(\varrho) = s$ auf die Konvergenz von $\sum a_\nu$ geschlossen werden kann. Dieses Ergebnis läßt sich auch auf Doppelreihen übertragen:

„Sind in der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\alpha_\mu^\nu + i\beta_\mu^\nu)$ sowohl die α_μ^ν als auch die β_μ^ν unter sich von gleichem Zeichen, ausgenommen höchstens diejenigen Glieder, deren Indizes beide kleiner als zwei endliche Zahlen m_1 und n_1 sind, so ist für die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ notwendig und hinreichend, daß $\lim_{\varrho,\varrho_1=1} s(\rho,\rho_1) = s$ existiert".

Beweis: Bezeichnen wir $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \alpha_\mu^\nu \rho^\mu \rho_1^\nu$ mit $\sigma(\rho,\rho_1)$, $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \beta_\mu^\nu \rho^\mu \rho_1^\nu$ mit $\tau(\rho,\rho_1)$, so spaltet sich unsere Grenzwertrelation in zwei Gleichungen:

$$\lim_{\varrho,\varrho_1=1} \sigma(\rho,\rho_1) = \sigma, \quad \lim_{\varrho,\varrho_1=1} \tau(\rho,\rho_1) = \tau.$$

Sind alle α_μ^ν gleich bezeichnet, so muß $\sigma_{mn} = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\mu^\nu$, wenn überhaupt konvergent, die Bedingung der Endlichkeit erfüllen. Nach § 2 ist also die Existenz des $\lim_{\varrho,\varrho_1=1} \sigma(\rho,\rho_1)$ für die Konvergenz von $\sigma(1,1)$ notwendig.

[1]) Münch. Ber. 1900, Bd. 30, p. 39 ff.

Um zu zeigen, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, nehmen wir etwa an, daß alle α_μ^ν positiv sind. Dann ist

$$\sigma_m^n(\rho, \rho_1) < \sigma(\rho, \rho_1).$$

Da nun $\sigma(\rho, \rho_1)$ monoton zunimmt, wenn ρ und ρ_1 der 1 sich nähern, so ist

$$\sigma(\rho, \rho_1) < \sigma \text{ für } \rho < 1,\ \rho_1 < 1.$$

Infolgedessen ist auch

$$\sigma_m^n(\rho, \rho_1) < \sigma \text{ für } \rho < 1,\ \rho_1 < 1$$

und daher

$$\sigma_m^n \leqq \sigma.$$

Die σ_m^n bilden aber, da alle $\alpha_\mu^\nu > 0$ sind, eine monoton zunehmende Folge und da sie alle unter einer endlichen Grenze σ bleiben, so besitzt nach einem bekannten Satze[1]) die Folge einen endlichen Grenzwert σ', der nach dem Abelschen Satze mit σ übereinstimmen muß.

Die gleiche Überlegung gilt für den imaginären Teil. — Sind endlich die Bedingungen des gleichen Vorzeichens für $\mu < m_1,\ \nu < n_1$ (gleichzeitig!) nicht erfüllt, so nehme man die Summe $\sum_{\mu=0}^{m_1-1} \sum_{\nu=0}^{n_1-1} a_\mu^\nu$ weg und wende auf die übrig bleibende Doppelreihe den gleichen Beweis an.

§ 9.

1. Dem Beweis des schon in der Einleitung erwähnten Tauberschen Satzes haben wir noch einige Betrachtungen vorauszuschicken. Es handelt sich zunächst darum, notwendige Bedingungen für die Konvergenz einer Doppelreihe aufzustellen, die zusammen mit der Existenz des $\lim_{x, y = 1} s(x, y)$ sich sodann als hinreichend erweisen werden.

Es besteht — wenn wir uns gleich etwas allgemeiner fassen, als es unmittelbar notwendig ist — der Satz:

„Ist $\lim_{m=\infty} |b_m| = \infty$ und $\sum_{\mu=0}^{m} \frac{|b_\mu - b_{\mu-1}|}{|b_m|} < G$, so ist für die Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ notwendig, daß

$$\lim_{m, n=\infty} \frac{s_{m_1}^n \cdot b_0 + \sum_{\mu=1}^{m} q_{m_1+\mu}^{0, n} b_\mu}{b_m} = 0$$

[1]) Pringsheim, Über zweifach unendliche Zahlenfolgen. Math. Ann. Bd. 53, p. 293.

für jedes $m_1 \geqq m_0$, wenn m_0 die erste Zahl ist, für die $|s^{\nu}_{m_0+\mu}| < g_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots)^{\alpha}$.[1])

Beweis: Setzt man $b_0 = \beta_0$, $b_\mu - b_{\mu-1} = \beta_\mu$ $(\mu > 0)$, so hat $\Sigma \beta_\mu$ die für Satz II von § 4 verlangten Eigenschaften. Soll $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} s^{\nu}_{\mu} = s$ existieren, so gibt es eine Zahl m_0 derart, daß für $m_1 \geqq m_0$

$$|s^{\nu}_{m_1+\mu}| < g_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2 \ldots$$

Definieren wir nun $t^{\nu}_0 = 0$, $t^{\nu}_\mu = s^{\nu}_{m_1+\mu-1}$ $(\mu > 0)$, so erfüllt diese Folge die Bedingungen des eben erwähnten Satzes. Somit ist

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} s^{n}_{m_1+\mu-1}\beta_\mu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m} \beta_\mu} = \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m} t^{n}_{\mu}\beta_\mu}{\sum\limits_{\mu=0}^{m} \beta_\mu} = s.$$

Subtrahiert man diese Gleichung von der folgenden:

$$\lim_{m,n=\infty} s^{n}_{m_1+m} = s,$$

so geht unter Berücksichtigung der Identität

$$s^{n}_{m_1+m}\sum_{\mu=0}^{m}\beta_\mu - \sum_{\mu=1}^{m} s^{n}_{m_1+\mu-1}\beta_\mu = s^{n}_{m_1}b_0 + \sum_{\mu=1}^{m} q^{0,n}_{m_1+\mu}b_\mu$$

hervor:

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{b_0 s^{n}_{m_1} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} q^{0,n}_{m_1+\mu}b_\mu}{b_m} = 0\,^{2}) \quad \text{w. z. b. w.} \qquad (1)$$

In der Form

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{b_0 s^{n}_{m_1} + \sum\limits_{\mu=1}^{m} (s^{n}_{m_1+\mu} - s^{n}_{m_1+\mu-1})\, b_\mu}{b_m} = 0 \qquad (1\,a)$$

ist die Bedingung notwendig für die Konvergenz jeder Doppelfolge s^{ν}_{μ}.

Ist ferner $|s^{n_1+\nu}_{\mu}| < g_\nu$ $(n_1 \geqq n_0)$, so ist auch, wie aus dem Gang des Beweises ersichtlich

---

[1]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines von Kronecker und Jensen gegebenen Satzes. (Comptes Rendus 103 (1886), p. 980 bezw. Comptes Rendus 106 (1888), p. 835.)

[2]) Dieser Beweis lehnt sich ganz an den des entsprechenden Satzes bei einfachen Reihen an. cf. Pringsheim, Münch. Ber. 30, p. 45.

$$\left| \frac{b_0 s_{m_1}^{n_1+\nu} + \sum_{\mu=1}^{m} \left(s_{m_1+\mu}^{n_1+\nu} - s_{m_1+\mu-1}^{n_1+\nu} \right) b_\mu}{b_m} \right| < g'_\nu \text{ für } n_1 \geqq n_0, \quad \nu = 0, 1, 2 \ldots$$

Ebenso wie (1) und (1 *a*) besteht auch, wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu-1})$ eine Reihe gleicher Eigenschaft wie $\sum_{\mu=0}^{\infty} \beta_\mu$ ist, die Gleichung

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{c_0 s_m^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n} p_{n_1+\nu}^{0,\, m} c_\nu}{c_n} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{c_0 s_m^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(s_m^{n_1+\nu} - s_m^{n_1+\nu-1} \right) c_\nu}{c_n} = 0. \tag{2 a}$$

Wir können insbesondere die Bedingung (2 *a*) auf die in (1) auftretende Doppelfolge $\frac{1}{b_m} \left(b_0 s_{m_1}^{n} + \sum_{\mu=1}^{m} q_{m_1+\mu}^{0,\, n} b_\mu \right)$ anwenden und erhalten dadurch wiederum eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $\sum a_\mu^\nu$, nämlich

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{b_0 c_0 s_{m_1}^{n_1} + b_0 \sum_{\nu=1}^{n} p_{n_1+\nu}^{0,\, m_1} c_\nu + c_0 \sum_{\mu=1}^{m} q_{m_1+\mu}^{0,\, n_1} b_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu c_\nu a_{m_1+\mu}^{n_1+\nu}}{b_m c_n} = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt eine notwendige Bedingung für das Bestehen von (1) und aus Symmetriegründen auch für (2) dar und ist eine viel schwächere Bedingung für die Konvergenz von $\sum a_\mu^\nu$ als (1) und (2).

Ist $m_0 = n_0 = 0$, so kann man auch $m_1 = n_1 = 0$ setzen. Wählt man endlich noch $b_\mu = \mu + 1$, $c_\nu = \nu + 1$, so geht der Satz hervor:

„Ist $|s_\mu^\nu| < \begin{cases} G_\mu \\ G_\nu \end{cases}$ für alle μ und ν, so ist für die Konvergenz von $s_\mu^\nu = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu$ notwendig, daß

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1)\, q_\mu^{0,\, n}}{m+1} = 0 \text{ und } \lim_{m,\, n=\infty} \frac{\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, p_\nu^{0,\, m}}{n+1} = 0.$$

Jede der beiden Bedingungen hat zur Folge, daß auch

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n}(\mu+1)(\nu+1)\,a_\mu^\nu}{(m+1)(n+1)} = 0^{\alpha}.$$

In dem allgemeinen Falle eines beliebigen m_0, n_0 hat man endlich den Satz:

„Für die Konvergenz der Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ ist es notwendig, daß zwei Zahlen m_0, n_0 existieren, so daß für jedes $m_1 \geqq m_0$, $n_1 \geqq n_0$

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s_{m_1}^{n} + \sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q_{m_1+\mu}^{0,\,n}}{m+1} = 0 \text{ und } \left|\frac{s_{m_1}^{n} + \sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q_{m_1+\mu}^{n,\,n}}{m+1}\right| < g_m$$

$$(m = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$\lim_{m,\,n=\infty} \frac{s_{m}^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p_{n_1+\nu}^{0,\,m}}{n+1} = 0 \text{ und } \left|\frac{s_{m}^{n_1} + \sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p_{n_1+\nu}^{0,\,m}}{n+1}\right| < g_n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).^{\alpha}$$

2. Es sind endlich noch einige sehr wichtige Transformationen, die wir im folgenden Paragraphen fortwährend anzuwenden haben werden, zu beweisen bezw. soweit sie schon bekannt sind, zusammenzustellen.

Transformation I.

Für einfache Reihen:

„Konvergiert $s(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ für $|x| < 1$, so gilt in demselben Kreise:

$$s(x) = (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu, \quad \text{wobei } s_\nu = \sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\lambda.^{\alpha} \qquad (I\,a)$$

(Pringsheim, Münch. Ber. 30, p. 47.)

Für endliche Summen besteht die Identität:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = (1-x)\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu x^\nu + s_n x^n. \quad \text{(Ebendort.)} \qquad (I\,b)$$

Für Doppelreihen:

„Konvergiert $s(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ für $|x|<1$, $|y|<1$, so gilt in diesem Gebiete die Transformation:

$$s(x,y)=(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} s_\mu^\nu x^\mu y^\nu, \quad \text{wobei } s_\mu^\nu=\sum_{\varkappa=0}^{\mu}\sum_{\lambda=0}^{\nu} a_\varkappa^\lambda. \tag{I c}$$

Beweis: Es konvergiert für $|x|<1$, $|y|<1$ sowohl $s(x,y)$ als auch $\frac{1}{(1-x)(1-y)}$ absolut, infolgedessen auch das Produkt beider Reihen, nämlich

$$\frac{s(x,y)}{(1-x)(1-y)}=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} s_\mu^\nu x^\mu y^\nu.$$

[Beweis nach Herrn Pringsheim l. c.; für den Fall $|s_\mu^\nu|<G$ wurde die Transformation schon von Bromwich und Hardy hergeleitet (Some extensions ... p. 164).]

Transformation II.

Einfache Reihen:

„Konvergiert $s(x)$ für $|x|<1$, so ist im gleichen Gebiete:

$$s(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{S_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}x^\nu+(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{S_\nu}{\nu+2}x^\nu, \tag{II a}$$

wobei $$S_\nu=\sum_{\lambda=0}^{\nu}(\lambda+1)a_\lambda.$$

Für endliche Summen hat man

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{S_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}x^\nu+(1-x)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{S_\nu}{\nu+2}x^\nu+\frac{S_n x^n}{n+1}. \tag{II b}$$

(Pringsheim l. c.)

Doppelreihen:

„Konvergiert $s(x,y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$, so ist im gleichen Gebiete:

$$s(x,y)=\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}x^\mu y^\nu+$$

$$+(1-x)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}x^\mu y^\nu+ \tag{II c}$$

$$+(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+2)}x^\mu y^\nu+(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)}x^\mu y^\nu.$$

Dabei ist

$$S_\mu^\nu = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\varkappa+1)(\lambda+1)\, a_\varkappa^\lambda \,{}^{a}.$$

Beweis: Da $s(x, y)$ für $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert, so gilt das nämliche für $\dfrac{\partial^2 (x y\, s(x, y))}{\partial x\, \partial y} = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} (\mu+1)(\nu+1)\, a_\mu^\nu\, x^\mu y^\nu$. Multipliziert man diese Doppelreihe mit der im gleichen Gebiete absolut konvergenten Reihe $\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$, so folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} S_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ für $|x| < 1$, $|y| < 1$. Dann konvergieren aber alle auf der rechten Seite von (II c) auftretenden Doppelreihen absolut im gleichen Gebiete. Die Übereinstimmung beider Seiten von (II c) beweist man unschwer durch Koeffizientenvergleich.

Es ist klar, daß man innerhalb des Bereiches der absoluten Konvergenz auch die Transformationen (I a), (II a) auf die Doppelreihe anwenden kann, da hier zwischen Doppelreihe und Kolonnen- oder Zeilenreihe kein Unterschied besteht.

Setzt man

$$\sum_{\varkappa=0}^{\mu} (\varkappa+1)\, a_\varkappa^\lambda = P_\lambda^{0,\mu}, \quad \sum_{\lambda=0}^{\nu} P_\lambda^{0,\mu} = \mathfrak{P}_\nu^{0,\mu},$$

so erhält man durch Anwendung von (II a)

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} x^\mu y^\nu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{(\mu+2)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} y^\nu =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu+2} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^{0,\mu} y^\nu - (1-y) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{\nu+2} y^\nu \right\}.$$

Nun ist wegen (I a)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu^{0,\mu} y^\nu = (1-y) \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}_\nu^{0,\mu} y^\nu.$$

Daher wird

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} x^\mu y^\nu =$$

$$= (1-y) \left\{ \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+2} x^\mu y^\nu - \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)} x^\mu y^\nu \right\}.$$

Wendet man das analoge Verfahren auf die dritte Summe in (II c) an, so geht schließlich die Transformation hervor:

$$\left.\begin{aligned} s(x,y) = &\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} x^\mu y^\nu + \\ &+ (1-x)(1-y)\left\{ \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+2} x^\mu y^\nu + \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{Q}_\mu^{0,\nu}}{\nu+2} x^\mu y^\nu - \right. \\ &\left. - \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)} x^\mu y^\nu \right\} \\ &\left(\mathfrak{Q}_\mu^{0,\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\mu} Q_\varkappa^{0,\nu};\quad Q_\varkappa^{0,\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} (\lambda+1)\, a_\varkappa^\lambda\right). \end{aligned}\right\} \quad (\text{II}\,d)$$

Für endliche Summen und $x=1$, $y=1$ hat man die Identität:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu = &\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} + \\ &+ \frac{1}{m+1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_m^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)} + \\ &+ \frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{II}\,c)$$

Wendet man noch auf die zweite und dritte Summe rechts die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{S_n}{n+1} \quad [\text{aus (II}\,b)] \qquad (\text{II}\,f)$$

an, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu = &\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} + \\ &+ \frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1} + \frac{\mathfrak{Q}_m^{0,n}}{n+1} - \frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)}. \end{aligned}\right\} \quad (\text{II}\,c')$$

§ 10.

1. Nach diesen Vorbereitungen können wir nunmehr an die Erweiterung des Tauberschen Satzes herantreten. Es soll zunächst eine von Landau[1]) für einfache Reihen hergeleitete Erweiterung des Tauberschen Satzes auf Doppelreihen folgendermaßen ausgedehnt werden:

„Bleiben die Partialsummen jeder Zeile der Doppelreihe $\sum a_\mu^\nu$ dem absoluten Betrage nach unter g_ν, ebenso die der Kolonnen unter g_μ, ist ferner

$$\lim_{m,n=\infty} s(x_m, y_n) = s \tag{1}$$

für die Punktfolgen $\begin{Bmatrix} x_1 x_2 \dots x_m \dots \\ y_1 y_2 \dots y_n \dots \end{Bmatrix}$ der Bereiche $\begin{Bmatrix} A \\ A_1 \end{Bmatrix}$, für welche

$$\begin{Bmatrix} \lim x_m = 1 \\ m=\infty \\ \lim y_n = 1 \\ n=\infty \end{Bmatrix} \text{ und } \begin{Bmatrix} |1-x_m| \\ |1-y_n| \end{Bmatrix} \text{ nie zunimmt}^2),$$

und bestehen die Gleichungen

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1} \equiv \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} (\mu+1)\, a_\mu^\nu}{m+1} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{\mathfrak{Q}_m^{0,\nu}}{n+1} \equiv \lim_{m,n=\infty} \frac{\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)\, a_\mu^\nu}{n+1} = 0, \tag{3}$$

so ist, wenn man $\left[\frac{1}{|1-x_m|}\right] = (m)$, $\left[\frac{1}{|1-y_n|}\right] = (n)$ setzt:

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} a_\mu^\nu = s\text{“}.$$

Beweis: Die Voraussetzungen $|p_\nu^{0,\mu}| < g_\nu$, $|q_\mu^{0,\nu}| < g_\mu$ haben zur unmittelbaren Folge, daß auch

$$|s_\mu^\nu| < G_\mu \quad \text{und} \quad |s_\mu^\nu| < G_\nu$$

[1]) Monatshefte für Math. u. Phys., Bd XVIII, p. 15–18. Der folgende Beweis lehnt sich an die Methoden von Herrn Pringsheim (Münch. Ber. 30, p. 47 ff.) und Herrn Landau an.

[2]) Die letztere Voraussetzung, die einer einfacheren Beweisführung zuliebe gemacht ist, bildet keine Beschränkung unseres Satzes.

für jedes μ und ν. Daraus folgt zunächst, daß

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1}\right| = \left|\frac{m+2}{m+1}\,s_m^n - \frac{s_0^n + s_1^n + \cdots s_m^n}{m+1}\right| < G_n \cdot \frac{2m+3}{m+1} < G_n'.$$

Da ferner

$$\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1} = \frac{\sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1)\, q_\mu^{0,n}}{m+1},$$

so ist

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1}\right| < \frac{\sum_{\mu=0}^{m} (\mu+1)\, g_\mu}{m+1} < G_m'$$

und es existiert folglich nach (2) eine Zahl G derart, daß

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_n^{0,m}}{m+1}\right| < G \tag{2a}$$

und ebenso

$$\left|\frac{\mathfrak{Q}_m^{0,n}}{n+1}\right| < G \tag{3a}$$

für alle m und n.

Aus (2) und der ersten dieser Ungleichungen folgt nach § 9, 1. daß auch

$$\lim_{m,n=\infty} \frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)} \equiv \lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\mu+1)(\nu+1)}{(m+1)(n+1)}\, a_\mu^\nu = 0 \tag{4}$$

und

$$\left|\frac{S_m^n}{(m+1)(n+1)}\right| < G \tag{4a}$$

(man kann eine Zahl G angeben, für die (2a), (3a) und (4a) gleichzeitig bestehen).

Wir behaupten zunächst, daß

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}\,(x_m)^\mu (y_n)^\nu = s.^{1}) \tag{5}$$

---

[1]) Um Verwechslungen mit der Schreibweise der Doppelfolgen zu vermeiden, soll die μ^{te} Potenz von x_m mit $(x_m)^\mu$ bezeichnet werden.

Wir gehen von der Transformation (II d) aus. Die Gleichung (5) besteht sicher, wenn einzeln im Bereiche $(A A_1)$:

$$\lim_{x,y=1}(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+2}x^\mu y^\nu=0$$

$$\lim_{x,y=1}(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Q}_\mu^{0,\nu}}{\nu+2}x^\mu y^\nu=0$$

$$\lim_{x,y=1}(1-x)(1-y)\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+2)(\nu+2)}x^\mu y^\nu=0.$$

Daß diese Gleichungen aber wirklich statthaben, folgt aus (2), (2 a), (3), (3 a), (4), (4 a) und dem Hilfssatze § 5, Nr. 3, wenn man dort $p=q=0$ setzt.

2. Wir zeigen nun zweitens, daß

$$\lim_{m,n=\infty}\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}=s.$$

Es ist

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu=$$

$$=\left(\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}+\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=(n)+1}^{\infty}+\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu,\nu=(m)+1,(n)+1}^{\infty}\right)\left(\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right).$$

Bestimmt man zwei Zahlen m_1 und n_1 so, daß für $\mu\geqq(m_1)$, $\nu\geqq(n_1)$

$$\left|\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}\right|<\frac{\varepsilon}{13\,g g_1} \tag{6 a}$$

und gleichzeitig

$$\left|\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+1}\right|<\frac{\varepsilon}{13\,g g_1}\ ^{1}) \tag{6 b}$$

$$\left|\frac{\mathfrak{Q}_\mu^{0,\nu}}{\nu+1}\right|<\frac{\varepsilon}{13\,g g_1},\ ^{1}) \tag{6 c}$$

[1]) Diese Ungleichungen werden erst später Verwendung finden.

so ist für $m \geqq m_1$, $n \geqq n_1$:

$$\sum_{\mu,\nu=(m)+1,(n)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu <$$

$$< \frac{\varepsilon}{13\, g g_1} \frac{1}{\big((m)+2\big)\big((n)+2\big)} \sum_{\mu,\nu=(m)+1,(n)+1}^{\infty} |x_m|^\mu |y_n|^\nu$$

$$< \frac{\varepsilon}{13\, g g_1 \big((m)+2\big)\big((n)+2\big)} \cdot \frac{1}{(1-|x_m|)(1-|y_n|)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{13\big((m)+2\big)\big((n)+2\big)} \cdot \frac{1}{|1-x_m|\,|1-y_n|} \quad \left(\text{da } \begin{Bmatrix} x_m \\ y_n \end{Bmatrix} \text{ in } \begin{Bmatrix} A \\ A_1 \end{Bmatrix} \text{ gelegen}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{13},$$

da

$$\frac{1}{|1-x_m|} < \left[\frac{1}{|1-x_m|}\right] + 1 = (m) + 1;$$

$$\frac{1}{|1-y_n|} < \left[\frac{1}{|1-y_n|}\right] + 1 = (n) + 1.$$

Um die Summe $\sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}$ zu behandeln, müssen wir sie nach (IIb) transformieren:

$$\sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} (y_n)^\nu = \sum_{\nu=0}^{(n)+1} P_\nu^{0,\mu} (y_n)^\nu -$$

$$- (1-y_n) \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{\nu+2} (y_n)^\nu - \frac{1}{(n)+2} S_\mu^{(n)+1} (y_n)^{(n)+1}.$$

Durch Anwendung von (Ib) auf $\sum_{\nu=0}^{(n)+1} P_\nu^{0,\mu} (y_n)^\nu$ erhält man hieraus:

$$\sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu =$$

$$= (1-y_n) \sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu -$$

$$- (1-y_n) \sum_{\nu=0}^{(n)} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+2)} (x_m)^\mu (y_n)^\nu +$$

$$+ (y_n)^{(n)+1} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu -$$

$$- \frac{1}{(n)+2} (y_n)^{(n)+1} \sum_{\mu=(m)+1}^{\infty} \frac{S_\mu^{(n)+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu.$$

Es ist nun:

$$(1-y_n)\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu=$$

$$=(1-y_n)\left(\sum_{\nu=0}^{(n_1)-1}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}+\sum_{\nu=(n_1)}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\right)\left(\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right).$$

Nach $(2a)$ ist mit Berücksichtigung von $|1-y_n|\leqq\frac{1}{(n)}$

$$(1-y_n)\sum_{\nu=0}^{(n_1)-1}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu<$$

$$<\frac{(n_1)\,G}{\big((m)+3\big)\,(n)\,(1-|x_m|)}<\frac{(n_1)\,Gg}{(n)\big((m)+3\big)\,|1-x_m|}$$

$$<\frac{(n_1)\,Gg}{(n)}<\frac{\varepsilon}{13},$$

wenn $(N_1)>\frac{13\,(n_1)\,Gg}{\varepsilon}$ und $n\geqq N_1$.

Wegen $(6b)$ ist

$$\left|(1-y_n)\sum_{\nu=(n_1)}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_n)^\mu(y_n)^\nu\right|<$$

$$\frac{\big((n)-(n_1)+1\big)\,\varepsilon}{(n)\big((m)+3\big)\,13\,g\,g_1\,(1-|x_m|)}<\frac{\varepsilon}{13\,g_1\big((m)+3\big)\,|1-x_m|}<\frac{\varepsilon}{13}.$$

Infolgedessen ist für $n\geqq N_1>n_1$, $m\geqq m_1$

$$\left|(1-y_n)\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<\frac{2\,\varepsilon}{13}.$$

Ferner ist

$$\left|(y_n)^{(n)+1}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{13\,g\,g_1\big((m)+3\big)\,(1-|x_m|)}<\frac{\varepsilon}{13\,g_1\big((m)+3\big)\,|1-x_m|}<\frac{\varepsilon}{13}.$$

Genau dieselben Schlüsse gelten für die beiden anderen Summen, in denen $\frac{\mathfrak{P}_\nu^{0,\mu}}{\mu+1}$ durch $\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}$ ersetzt ist. Also ist

$$\left|\sum_{\nu=0}^{(n)}\sum_{\mu=(m)+1}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<\frac{6\varepsilon}{13}$$

$$\text{für } n\geqq N_1>n_1,\ m\geqq m_1.$$

Entsprechend zeigt man, daß

$$\left|\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=(n)+1}^{\infty}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right|<\frac{6\varepsilon}{13}$$

$$\text{für } m\geqq M_1>m_1,\ n\geqq n_1,$$

wobei

$$(M_1)>\frac{13(m_1)Gg_1}{\varepsilon}.$$

Für $m\geqq M_1$, $n\geqq N_1$ ist daher

$$\left|\left(\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}-\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\right)\left(\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right)\right|<\varepsilon$$

oder

$$\lim_{m,n=\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}-\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\right)\left(\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu\right)=0.$$

Addiert man diese Gleichung zu (5), so folgt

$$\lim_{m,n=\infty}\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu(y_n)^\nu=s. \quad (7)$$

3. Bevor wir weiterfahren, soll bemerkt werden, daß, wenn $\lim_{\mu,\nu=\infty} c_\mu^\nu=0$ und $|c_\mu^\nu|<G$ für alle μ und ν, nach dem Cauchyschen Grenzwertsatze immer gilt:

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{1}{m+1}\sum_{\mu=0}^{m}|c_\mu^n|=0 \text{ und } \lim_{m,n=\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}|c_m^\nu|=0. \quad (8)$$

Durch Anwendung von (II f) auf $\sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}$ ergibt sich nun:

$$\sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} = \mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu} - \frac{1}{(n)+2} S_\mu^{(n)+1},$$

daher

$$\sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) =$$

$$\sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) - \frac{1}{(n)+2} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^{(n)+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right).$$

Beachtet man, daß

$$|(x_m)^\mu - 1| = |1 - x_m| \cdot |1 + x_m + (x_m)^2 + \cdots (x_m)^{\mu-1}|$$

$$< \mu |1 - x_m| \leqq \frac{\mu}{(m)},$$

so ergibt sich:

$$\left| \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) \right| < \frac{1}{(m)} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{|\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\mu}|}{\mu+1}$$

$$\left| \frac{1}{(n)+2} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^{(n)+1}}{(\mu+1)(\mu+2)} \left((x_m)^\mu - 1\right) \right| < \frac{1}{(m)} \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{|S_\mu^{(n)+1}|}{(\mu+1)((n)+2)}$$

und hieraus nach (2), (2a), (4), (4a) und (8)

$$\lim_{m,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} \left(1 - (x_m)^\mu\right) = 0 \quad (9)$$

Nach (II b) ist ferner

$$\sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)} (x_m)^\mu =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{(m)+1} Q_\mu^{0,n} (x_m)^\mu - (1 - x_m) \sum_{\mu=0}^{(m)} \frac{S_\mu^n}{\mu+2} (x_m)^\mu - \frac{S_{(m)+1}^n}{(m)+2} (x_m)^{(m)+1}.$$

Nach (I b) hat man

$$\sum_{\mu=0}^{(m)+1} Q_\mu^{0,n}(x_m)^\mu = (1-x_m)\sum_{\mu=0}^{(m)} \mathfrak{Q}_\mu^{0,n}(x_m)^\mu + (x_m)^{(m)+1}\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,n}.$$

Daher ist

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right| =$$

$$= \left|(1-x_m)\sum_{\mu=0}^{(m)}\mathfrak{Q}_\mu^{0,n}(x_m)^\mu - (1-x_m)\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{\mu+2}(x_m)^\mu + \right.$$

$$\left. + (x_m)^{(m)+1}\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,n} - (x_m)^{(m)+1}\frac{S_{(m)+1}^n}{(m)+2}\right| \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$< \frac{1}{(m)}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{|\mathfrak{Q}_\mu^{0,n}|}{n+1} + \frac{1}{(m)}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{|S_\mu^n|}{(\mu+2)(n+1)} + \frac{|\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,n}|}{n+1} + \frac{|S_{(m)+1}^n|}{(m+2)(n+1)}.$$

Nach (3), (3 a), (4), (4 a) und (8) ist also

$$\lim_{m,n=\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu = 0 \qquad (10)$$

und

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^n}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right| < 4G \qquad (10\,a)$$

für alle m und n.

Nun ist:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{(m)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)}(x_m)^\mu\left(1-(y_n)^\nu\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{1-(y_n)^\nu}{(\nu+1)(\nu+2)}\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right|$$

$$< \frac{1}{(n)}\sum_{\nu=0}^{(n)}\frac{1}{\nu+1}\left|\sum_{\mu=0}^{(m)}\frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)}(x_m)^\mu\right|,$$

da $|(y_n)^\nu - 1| < \frac{\nu}{(n)}$.

Nach (10), (10 a) und (8) ist also

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} (x_m)^\mu \left(1-(y_n)^\nu\right) = 0. \quad (11)$$

Addiert man jetzt (7), (9) und (11), so folgt

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} = s \quad (12)$$

Aus der Identität (II e'), die für unseren Fall lautet:

$$\sum_{\mu=0}^{(m)+1} \sum_{\nu=0}^{(n)+1} a_\mu^\nu = \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} \frac{S_\mu^\nu}{(\mu+1)(\mu+2)(\nu+1)(\nu+2)} +$$

$$+ \frac{\mathfrak{P}_{(n)+1}^{0,\,(m)+1}}{(m)+2} + \frac{\mathfrak{Q}_{(m)+1}^{0,\,(n)+1}}{(n)+2} - \frac{S_{(m)+1}^{(n)+1}}{\left((m)+2\right)\left((n)+2\right)},$$

folgt dann vermöge (2), (3) und (4):

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)+1} \sum_{\nu=0}^{(n)+1} a_\mu^\nu = s,$$

wofür man, da wegen (2), (3) und (4)

$$\lim_{m,\,n=\infty} q_m^{0,\,n} = 0, \quad \lim_{m,\,n=\infty} p_n^{0,\,m} = 0, \quad \lim_{m,\,n=\infty} a_m^n = 0,$$

auch schreiben kann:

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{(m)} \sum_{\nu=0}^{(n)} a_\mu^\nu = s, \quad (13)$$

w. z. b. w.

4. Kommen nun in der Reihe der (m) bezw. (n) alle ganzen Zahlen $\geqq M$ bezw. $\geqq N$ vor, so besagt (13), daß $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ konvergiert und s zum Wert hat.

Es wird in manchen Fällen vorteilhaft sein, an Stelle der Bedingungen (2) und (3) einfachere, aber freilich auch engere Bedingungen zu kennen. So ist nach dem Cauchyschen Grenzwertsatz (2) und (3) sicher erfüllt, wenn

$$\lim_{m,\,n=\infty} m\, q_m^{0,n} = 0 \quad [1] \tag{2'}$$

$$\lim_{m,\,n=\infty} n\, p_n^{0,m} = 0. \tag{3'}$$

Finden diese Relationen auch dann noch statt, wenn man die a_μ^ν durch ihre absoluten Beträge ersetzt, so konvergiert die Doppelreihe für alle Stellen $x = e^{\varphi i}$, $y = e^{\psi i}$, für welche die Bedingung der Endlichkeit und (1) erfüllt ist. (2') und (3') können in diesem Falle ersetzt werden durch die äquivalenten Relationen:

$$\lim_{m=\infty} m \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_m^\nu| = 0 \tag{2''}$$

$$\lim_{n=\infty} n \sum_{\mu=0}^{\infty} |a_\mu^n| = 0. \tag{3''}$$

Aber gerade aus dieser Form ersieht man, daß die Anwendbarkeit dieses speziellen Kriteriums beschränkt sein wird, da die absolute Konvergenz aller Zeilen und Kolonnen (mit Ausnahme einer endlichen Anzahl) die Voraussetzung bildet. Im Gegensatz hiezu sind, wenn von der Reihe $\sum a_\mu^\nu$ schon feststeht, daß alle Zeilen bezw. Kolonnen unter g_ν bezw. g_μ bleiben, die Bedingungen (2), (3) und (1) (letztere im Sinne dieser Nummer) für die Konvergenz von $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

5. Wir wollen nun das erhaltene Resultat dazu verwenden, um für eine beliebige Doppelreihe notwendige und hinreichende Konvergenzbedingungen aufzustellen und so dem „allgemeinen Abelschen Grenzwertsatze“ einen „allgemeinen Tauberschen Satz“ als Umkehrung gegenüberstellen.

Wir machen wie früher von der Doppelreihe $s(x, y)$ die eine Voraussetzung, daß sie für $|x| < 1$, $|y| < 1$ absolut konvergiert. Dann ist nach § 3 zur Konvergenz von $\sum_{\mu,\,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ notwendig die Existenz zweier den Bereichen $\left\{\begin{matrix} A \\ A_1 \end{matrix}\right\}$ angehörigen Punktfolgen

$$\left\{\begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_m \ldots \\ y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots \end{matrix}\right\} \quad \left(\left\{\begin{matrix} \lim\limits_{m=\infty} x_m = 1 \\ \lim\limits_{n=\infty} y_n = 1 \end{matrix}\right\}\right),$$

[1]) Es entsprechen diese Bedingungen der bekannten Bedingung $\lim\limits_{n=\infty} n\, a_\mu = 0$ bei einfachen Reihen.

von der Eigenschaft, daß

$$\lim_{m,\,n=\infty}\left\{s(x_m,y_n)+\sum_{\nu=1}^{\nu'}p_{\alpha_\nu}(x_m)\left((y_n)^{n''}-(y_n)^{\alpha_\nu}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{m'}q_{\beta_\mu}(y_n)\left((x_m)^{m''}-(x_m)^{\beta_\mu}\right)\right\}=s, \tag{1}$$

wenn p_{α_ν}, q_{β_μ} wie früher die bei der gewählten Art des Grenzüberganges nicht unter endlichen Grenzen bleibenden Zeilen und Kolonnen und m'', n'' zwei ganze Zahlen sind.

An Stelle von (2) und (3) haben wir jetzt nach § 9, Nr. 1, zu schreiben:

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{s^n_{m_1}+\sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q^{0,\,n}_{m_1+\mu}}{m+1}=0 \tag{2a}$$

$$\left|\frac{s^n_{m_1}+\sum_{\mu=1}^{m}(\mu+1)\,q^{0,\,n}_{m_1+\mu}}{m+1}\right|<g_m,\qquad m=0,1,2,3\ldots \tag{2b}$$

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{s^{n_1}_m+\sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p^{0,\,m}_{n_1+\nu}}{n+1}=0 \tag{3a}$$

$$\left|\frac{s^{n_1}_m+\sum_{\nu=1}^{n}(\nu+1)\,p^{0,\,m}_{n_1+\nu}}{n+1}\right|<g_n,\qquad n=0,1,2,3\ldots \tag{3b}$$

Wir definieren nun wie p. 8:

$$b^\nu_\mu=a^{n_1+\nu}_{m_1+\mu},\quad b^\nu_0=s^{n_1+\nu}_{m_1}-s^{n_1+\nu-1}_{m_1},\quad b^0_\mu=s^{n_1}_{m_1+\mu}-s^{n_1}_{m_1+\mu-1},\quad b^0_0=s^{n_1}_{m_1}.$$

Dann schreibt sich (2) und (3), wenn wir Zeilen und Kolonnen der Reihe $\sum b^\nu_\mu$ mit $\bar p$, $\bar q$ bezeichnen:

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)\,\bar q^{0,\,n}_\mu}{m+1}=0 \tag{2'a}$$

$$|\bar q^{0,\,n}_\mu|<g'_\mu\ \text{(folgt unmittelbar aus (2b))},\qquad \mu=0,1,2\ldots \tag{2'b}$$

$$\lim_{m,\,n=\infty}\frac{\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1)\,\bar p^{0,\,m}_\nu}{n+1}=0 \tag{3'a}$$

$$|\bar p^{0,\,m}_\nu|<g'_\nu\ \text{(folgt unmittelbar aus (3b))},\qquad \nu=0,1,2\ldots \tag{3'b}$$

Aus $(2'b)$ und $(3'b)$ folgt, daß $\alpha_n \leqq n_1$, $\beta_m \leqq m_1$; ferner ist aus diesen Gleichungen ersichtlich, daß man in (1) die Zahlen m'' und n'' durch m_1 und n_1 ersetzen darf und daß es in derselben Gleichung erlaubt ist, $\sum_{\nu=1}^{n'} p_{\alpha_\nu}(x_m)$ bezw. $\sum_{\mu=1}^{m'} q_{\beta_\mu}(y_n)$ zu $\sum_{\nu=0}^{n_1-1} p_\nu(x_m)$ bezw. $\sum_{\mu=0}^{m_1-1} q_\mu(y_n)$ zu ergänzen. Man erhält dann

$$\lim_{m,\,n=\infty} \left\{ s(x_m, y_n) + \sum_{\nu=0}^{n_1-1} p_\nu(x_m) \left((y_n)^{n_1} - (y_n)^\nu \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=0}^{m_1-1} q_\mu(y_n) \left((x_m)^{m_1} - (x_m)^\mu \right) \right\} = s.$$

Nun ist aber nach § 3 Nr. 1 die $\left\{ \quad \right\}$ bis auf eine für $x=1, y=1$ verschwindende ganze rationale Funktion von x und y mit $x^{m_1} y^{n_1} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_\mu^\nu x^\mu y^\nu$ identisch. Infolgedessen hat man auch:

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_\mu^\nu (x_m)^\mu (y_n)^\nu = s.$$

Für die Reihe $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} b_\mu^\nu$ sind also die Bedingungen des in Nr. 1 bis 4 bewiesenen Satzes erfüllt, d. h.

$$\lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} b_\mu^\nu = s \quad \text{oder} \quad \lim_{m,\,n=\infty} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_\mu^\nu = s,$$

wenn wir von den Punktfolgen $x_1 x_2 \ldots x_m \ldots$ bezw. $y_1 y_2 \ldots y_n \ldots$ voraussetzen, daß in der Reihe der (m) bezw. (n) alle ganzen Zahlen $\geqq M$ bezw. $\geqq N$ vorkommen.

So erhalten wir den allgemeinen Tauberschen Satz:

„Konvergiert $s(x, y)$ für $|x|<1$, $|y|<1$ absolut, so ist für die Konvergenz von $\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} a_\mu^\nu$ die gleichzeitige Erfüllung der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

1. Bezeichnet $\begin{Bmatrix} x_1, x_2 \ldots x_m \ldots \\ y_1, y_2 \ldots y_n \ldots \end{Bmatrix}$ zwei Punktfolgen der Bereiche $\begin{Bmatrix} A \\ A_1 \end{Bmatrix}$, für welche

$$a) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{m=\infty} x_m = 1\ ^{1}) \\ \lim\limits_{n=\infty} y_n = 1, \end{cases}$$

b) in der Reihe der Zahlen

$$\begin{cases} (m) = \left[\dfrac{1}{|1 - x_m|} \right] \\ (\mu) = \left[\dfrac{1}{|1 - y_\mu|} \right] \end{cases}$$

alle ganzen Zahlen $\begin{cases} \geqq M \\ \geqq N \end{cases}$ vorkommen, so muß

$$\lim_{m,\, n=\infty} \left\{ s(x_m, y_n) + \sum_{\nu=1}^{n'} p_{\alpha_\nu}(x_m) \left((y_n)^{n''} - (y_n)^{\alpha_\nu} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{m'} q_{\beta_\mu}(y_n) \left((x_m)^{m''} - (x_m)^{\beta_\mu} \right) \right\} = s \qquad (1)$$

sein, wobei $p_{\alpha_\nu}(x)$, $q_{\beta_\mu}(y)$ die bei der gewählten Art des Grenzüberganges nicht unter endlichen Grenzen bleibenden Zeilen bezw. Kolonnen sind und m'' und n'' zwei ganze Zahlen vorstellen sollen.

2. Es müssen bei hinreichend groß gewähltem m_1 und n_1 die Gleichungen bestehen:

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{s^{n}_{m_1} + \sum_{\mu=1}^{m} (\mu + 1)\, q^{0,\, n}_{m_1 + \mu}}{m+1} = 0 \qquad (2\,a)$$

$$\left| \frac{s''_{m_1} + \sum_{\mu=1}^{m} (\mu + 1)\, q^{0,\, n}_{m_1 + \mu}}{m+1} \right| < g_m, \quad m = 0, 1, 2 \ldots \qquad (2\,b)$$

$$\lim_{m,\, n=\infty} \frac{s^{m_1}_{m} + \sum_{\nu=1}^{n} (\nu + 1)\, p^{0,\, m}_{n_1 + \nu}}{n+1} = 0 \qquad (3\,a)$$

$$\left| \frac{s^{m_1}_{m} + \sum_{\nu=1}^{n} (\nu + 1)\, p^{0,\, m}_{n_1 + \nu}}{n+1} \right| < g_n, \; n = 0, 1, 2 \ldots \text{“}. \qquad (3\,b)$$

[1]) Die Bedingung, daß $|1 - x_m|$ nie zunimmt, kann wie schon bemerkt, weggelassen werden.

Lebenslauf.

Ich, Hermann Holzberger, wurde am 28. Dezember 1889 zu Passau geboren als Sohn des Institutsdirektors Hermann Holzberger und seiner Ehefrau Lina geborenen Schmidt und bin protestantischer Konfession. Meine Schulbildung erhielt ich am K. Alten Gymnasium zu Würzburg und am K. Maximilians-Gymnasium zu München, wo ich im Juli 1908 das Reifezeugnis erhielt. Vom Wintersemester 1908/09 bis zum Sommersemester 1912 widmete ich mich an der Universität München dem Studium der Mathematik und unterzog mich im Oktober 1910 und Oktober 1912 den beiden Abschnitten der Prüfung für den Unterricht in Mathematik und Physik an den bayerischen Mittelschulen. Während meines Studiums besuchte ich die Vorlesungen und Übungen der Herren Böhm, Cornelius, Doehlemann, Graetz, v. Groth, Lindemann, Lipps, Th. Paul, Pringsheim, Rehm, Riehl, v. Seeliger, Sommerfeld und Voß, denen ich mich für die Bereicherung meiner Kenntnisse zu großem Dank verpflichtet fühle. Vor allem sei es mir gestattet, Herrn Professor Dr. A. Pringsheim, dem ich die Anregung zu dieser Abhandlung verdanke, für sein Interesse und für die mir von seiner Seite zu teil gewordene reiche Förderung meinen aufrichtigsten Dank zum Ausdruck zu bringen. Auch Herrn Professor Dr. F. Hartogs bin ich für Literaturangaben großen Dank schuldig.